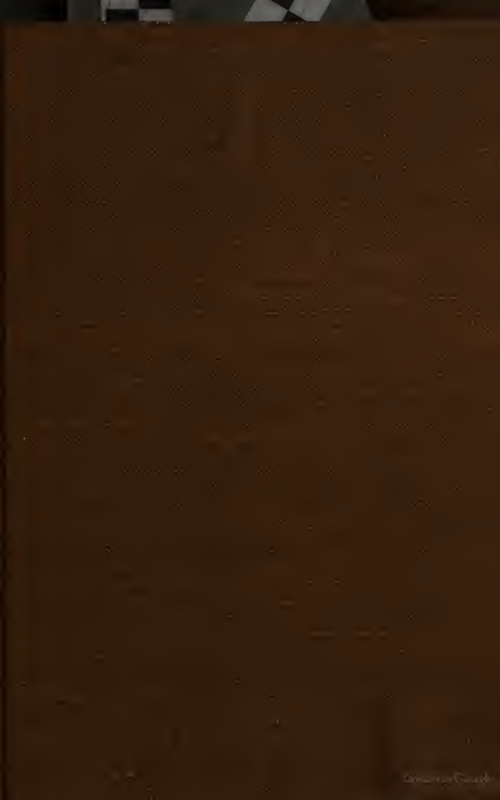




TRATTATO

DELLA

RESISTENZA DEI MATERIALI

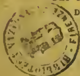
APPLICATA

ALLE COSTRUZIONI IN LEGNO, IN FERRO ED IN MURATURA

SENZA ANALISI INFINITESIMALE

ad uso

DEGLI ISTITUTI TECNICI
DEI PERITI COSTRUTTORI E MECCANICI
DEGLI INGEGNERI E DEGLI ARCHITETTI



PER

LAZZARO FUBINI

Ingegnere laureato
e Professore nel R. Istituto Industriale e Professionale di Venezia.

TAVOLE e TABELLE



TORINO
PRESSO AUGUSTO FEDERICO NEGRO EDITORE
4, via Alfieri, 4

TRATTATO

DELLA

RESISTENZA DEI MATERIALI

APPLICATA

ALLE COSTRUZIONI IN LEGNO, IN FERRO ED IN MURATURA

SENZA ANALISI INFINITESIMALE

ad uso

DEGLI ISTITUTI TECNICI

DEI PERITI COSTRUTTORI E MECCANICI

DEGLI INGEGNERI E DEGLI ARCHITETTI



PER

LAZZARO FUBINI

Ingegnere laureato

e Professore nel R. Istituto Industriale e Professionale di Venezio.



TORINO

PRESSO AUGUSTO FEDERICO NEGRO EDITORE

4, via Alfieri, 4

OPERE CONSULTATE

NELLA COMPILAZIONE DEL PRESENTE TRATTATO

Hatzel — Statik der Baukonstrukzionen.
Curioni — L'Arte di fabbricare.
Colignon — Théorie élémentaire des poutres droites.
Fr. Laissle und **Ad. Schübler** — Der Bau der Brückenträger.
Bourdais — Résistances des matériaux.

Torino — Tip. BONA, via Carlo Alberto, 1. — 1871.

Fra le materie d'insegnamento prescritte negli Istituti Tecnici, tengono per certo un luogo importante quelle, che si occupano di Costruzione e di Meccanica. E bene a ragione; chè in questi tempi i due rami di scienza anzidetti contengono il germe di tutte le più mirabili opere nostre e sono presagio di prosperità e di felice avvenire per il nostro paese.

Ma per lo più i giovani degli Istituti Tecnici, forniti soltanto delle cognizioni di Algebra elementare, di Geometria, di Trigonometria e dei principii di Geometria analitica, mancano di molti mezzi necessarii allo studio di quella parte di scienza, che tratta a fondo della Meccanica e della Costruzione. Di qui la causa delle molte difficoltà, che presenta quest'ultimo insegnamento; a superare le quali cerca il presente trattato, che contiene la *resistenza dei materiali applicata alle costruzioni senza analisi infinitesimale.*

Questo trattato venne diviso in due parti; nella prima si tratta della resistenza dei materiali, nella seconda se ne fa applicazione alle armature, ai cavalletti poligonali e curvilinei, ai muri di so-

stegno, alle vôlte ed ai ponti in ferro; il tutto compilato coi principii più elementari di Matematica e di Meccanica razionale.

Lo scopo, che mi sono proposto, è di coadiuvare, per quanto le mie forze lo permettono, gli studiosi in questo ramo importantissimo della scienza delle costruzioni; perciò, oso sperare, che questo mio lavoro troverà benigna accoglienza.

LAZZARO FUBINI.

PARTE PRIMA

RESISTENZA DEI MATERIALI

CAPITOLO I.

NOZIONI GENERALI.

§ 1. **Azioni molecolari.** — Le forze, che agiscono sopra un corpo, vi producono deformazioni, e sviluppano azioni molecolari interne. Le deformazioni aumentano col crescere delle forze. Se queste rimangono stazionarie e la deformazione resta costante, allora si stabilisce l'equilibrio tra le forze estrinseche e le molecolari intrinseche, delle quali la risultante dicesi resistenza. Svariatissimi sono i modi, con cui può venire cimentata tale resistenza; per il nostro scopo basta tener conto delle seguenti:

1° *Resistenza all'estensione*, che si sviluppa, quando le forze estrinseche tendono ad allungare egualmente tutte le fibre del corpo:

2° *Resistenza alla compressione,* quando le fibre del corpo vengono egualmente schiacciate:

3° *Resistenza alla flessione*, quando le forze estrinseche normali, od oblique all'asse del solido, tendono ad incurvarlo:

4° *Resistenza allo scorrimento trasversale o longitudinale*, quando una parte del corpo tende a staccarsi dall'altra, scorrendo sopra una sezione trasversale o longitudinale:

5° *Resistenza alla torsione*, quando le sezioni trasversali del corpo sono sollecitate a rotare intorno al loro centro di gravità, strisciando le une sopra le altre, senza che la lunghezza del corpo si cambi sensibilmente.

Prima della rottura avviene nel corpo una deformazione più o meno sensibile: così nell'allungarsi, le fibre si assottigliano, nel raccorciarsi, s'ingrossano; nella flessione, il corpo s'incurva, le fibre poste nella parte concava si schiacciano, e quelle poste nella parte convessa si allungano.

La proprietà, che quasi tutti i corpi godono, la tendenza cioè a ripigliare la forma primitiva, quando cessa l'azione della forza estrinseca, purchè questa non superi un dato limite, dicesi *elasticità*.

Un corpo dicesi completamente elastico, quando al cessare delle forze riprende la forma primitiva; quando la riprende solo in parte, dicesi incompletamente elastico.

Dentro i limiti dell'elasticità, le deformazioni sono proporzionali alle forze estrinseche; così per es. un prisma, che sotto l'azione della forza p si allunga di λ, per effetto della forza $2p$ si allungherà di 2λ.

Quando le deformazioni subìte dal corpo sorpassano il limite dell'elasticità, la resistenza diviene minore, e la rottura tiene dietro all'alterazione di forma.

§ 2. **Resistenza dei corpi.** — I corpi presentano alla rottura una resistenza diversa, la quale nello stesso corpo poi dipende da accidentali circostanze. Così vien variata, nei metalli dalla lavorazione subìta e dal tempo impiegato nel raffreddamento; nei legnami, dal clima della regione, dalla natura e dalla giacitura del suolo, dall'età e dalla maggiore o minore secchezza; nella stessa pianta poi cambia dalle radici alla chioma.

I risultati ottenuti dalle ricerche più diligenti, fatte sopra la resistenza dei materiali, non possono esser tenuti che come valori approssimativi. La resistenza alla rottura presentata dall'unità di area della sezione, dicesi *coefficiente di resistenza.*

Nelle costruzioni di grande importanza, il coefficiente di resistenza dei materiali da impiegarsi, deve esser trovato con apposite esperienze.

Alle costruzioni, devonsi dare, per la stabilità, tali dimensioni, che la resistenza per ogni unità di area della sezione trasversale delle parti, che le compongono, sia inferiore al coefficiente di resistenza: la stabilità sarà tanto maggiore, quanto minore sarà il rapporto tra la resistenza, che presenta l'unità di area della sezione, ed il valore della forza capace di produrne la rottura.

CAPITOLO II.

RESISTENZA ALL'ESTENSIONE.

§ 3. Allungamento delle fibre dei prismi rettilinei di data materia e di note dimensioni. — In un corpo prismatico verticale vien cimentata la resistenza all'estensione, quando incastrato nell'estremità superiore, viene sollecitato nell'altra da pesi, aventi la risultante diretta secondo l'asse longitudinale del corpo. Sotto l'azione di tali sforzi, tutte le fibre del corpo vengono allungate di un'eguale quantità. Si vogliono calcolare gli allungamenti subìti dalle fibre di un corpo prismatico di data materia e di note dimensioni dentro i limiti dell'elasticità.

Poniamo per il prisma dato:

a l'area della sua sezione trasversale,

l la sua lunghezza,

ϵ' l'allungamento prodotto dalla forza p.

Per un altro prisma di eguale materia sia:

A l'area della sezione,

L la lunghezza,

ϵ'' l'allungamento, che ha luogo sotto l'azione della forza P.

Dall'esperienza si ha che:

α) Gli allungamenti delle fibre di due prismi di eguale sezione trasversale e di eguale lunghezza, sono proporzionali agli sforzi p e P.

β) Due prismi, i quali presentano eguale sezione trasversale, sotto l'azione di sforzi eguali si allungano di quantità proporzionali alle loro lunghezze.

γ) Gli allungamenti, che subiscono le fibre de' due corpi prismatici di eguale lunghezza, sono inversamente proporzionali alle loro sezioni trasversali.

Questi risultati di esperienze dànno luogo alla proporzione:

$$\epsilon' : \epsilon'' = \frac{pl}{a} : \frac{PL}{A} \qquad (1).$$

Se $\frac{1}{E}$ è il valore che riceve ϵ'' per $L = 1$, $P = 1$, $A = 1$, si ottiene la proporzione

$$\epsilon' : \frac{1}{E} = \frac{pl}{a} : 1,$$

da cui

$$\epsilon' = \frac{pl}{Ea} \qquad (I).$$

Pongasi lo sforzo $\frac{p}{a}$, che sollecita l'unità di area della sezione, eguale a K, si avrà:

$$\epsilon' = K \frac{l}{E} \qquad (II)$$

nella quale $E = K$, quando $\epsilon' = l$; dal che si vede, che E è l'intensità della forza capace di allungare il prisma di una quantità eguale alla sua lunghezza.

La grandezza E, costante per lo stesso materiale, serve di misura dell'elasticità, e prende nome di *modulo di elasticità*.

§ 4. Equazione di stabilità dedotta dalla resistenza, che presenta il prisma, nel subire il massimo allungamento senza alterazione di elasticità. — Il valore del massimo allungamento λ, che possono subire le fibre di un corpo prismatico di lunghezza $l = 1$ senza alterazione di elasticità, si ottiene, ponendo nella (I) del § 3 per $\frac{p}{a}$ il valore della forza R, che ha tale intensità da allungare le fibre fino al limite dell'elasticità, perciò:

$$\lambda = \frac{R}{E} \qquad (I).$$

Un prisma di lunghezza l, dentro i limiti dell'elasticità, può subire l'allungamento massimo

$$\epsilon = \lambda l = \frac{R}{E} l \qquad (II).$$

Ora l'allungamento massimo, subito dalle fibre di un prisma, è proporzionale direttamente alla sua lunghezza l, alla forza p, che lo produce, ed inversamente alla sezione a, quindi:

$$\epsilon = \frac{p}{a} \frac{l}{E},$$

da cui:

$$\lambda E = \frac{p}{a} = R \qquad \text{(III)}.$$

Dunque la forza capace di imprimere il massimo allungamento nelle fibre di un prisma di sezione $= a$, eguaglia il prodotto di a per R, e l'equazione di stabilità sarà:

$$p < Ra \qquad \text{(IV)}.$$

Esempio. Si determini la massima resistenza, che può presentare, ed il massimo allungamento, che può subire, senza alterazione di elasticità, una spranga prismatica di ferro, avente la lunghezza $l = 60$ centimetri, la base rettangolare di area $a = 5$ c.m.q.

Il valore di R per il ferro è 1200 chilogrammi per c.m.q., quindi la massima resistenza, che potrà presentare la spranga alla estensione, senza alterazione di elasticità, sarà:

$P = 1200.\ 5 = 6000$ chilogrammi. Il valore di λ per il ferro è 0,0006; quindi $\epsilon = 0{,}0006.\ 0{,}6 = 0{,}00036$ sarà il massimo allungamento, che potrà ricevere la spranga senza alterazione di elasticità.

§ 5. Equazione di stabilità dedotta dalla resistenza alla rottura per estensione. — Quando la forza, che sollecita l'unità di area della sezione trasversale, supera il valore di R, l'elasticità viene alterata, e col progressivo aumento della forza estrinseca, la rottura tende a sostituire l'allungamento. Il valore della più piccola forza, capace di produrre la rottura, dicesi coefficiente di resistenza alla rottura per estensione. Le numerose esperienze eseguite ci hanno fatto conoscere, che le resistenze alla rottura, presentate da più prismi di eguale sostanza, sono proporzionali alle aree delle loro sezioni trasversali, quindi esprimendo con K_1 il coefficiente di resistenza alla rottura riferito all'unità di area, con P il valore della forza capace di produrre la rottura in un prisma di sezione $=$ A, si avrà la proporzione: $K_1 : P = 1 : A$, da cui:

$$P = K_1 A \qquad \text{(I)}.$$

Per la stabilità il prisma deve sopportare uno sforzo F minore di $K_1 A$, ossia:

$$F = n\ K_1 A \qquad \text{(II)},$$

essendo n una frazione, che prende nome di coefficiente di stabilità, il quale prendesi $\frac{1}{10}$ per il legno, $\frac{1}{5}$ per i metalli, e non minore di $\frac{1}{10}$ per le pietre.

Esempio 1°. Si determini il peso, che può sopportare una trave di quercia con asse verticale, incastrata ad una estremità, avente per sezione trasversale un rettangolo di area 1,83 d.c.q.

Il valore di $\frac{1}{10}$ K_1 per la quercia è 6000 chilogrammi per decimetro quadrato.

Il peso del d.c.c. è chilogrammi 0,8. Ponendo la lunghezza $l = 15$ d.c., si ottiene:

$$P + 0,8 \times 1,83 \times 15 = 6000 \times 1,83,$$

da cui:

$$P = 11000 \text{ chilogrammi.}$$

Esempio 2°. Si determini la massima lunghezza di una spranga di ferro verticale incastrata nell'estremità superiore, affinchè non si rompa sotto l'azione del proprio peso.

Sia A l'area della sua sezione, l la lunghezza incognita; per la stabilità deve avere luogo l'equazione:

$$A \times 0,008\, l = \frac{1}{5}\, 4000\, A\,,$$

essendo 0,008 il peso del c.m.c. del ferro, 4000 il coefficiente di resistenza del ferro all'estensione riferita al c.m.q., ed $\frac{1}{5}$ il coefficiente di stabilità; quindi la lunghezza

$$l = 100,000 \text{ metri.}$$

§ 6. Solido di eguale resistenza all'estensione. — L'equazione $F = nK_1A$ serve per calcolare il valore di A, area della sezione del prisma, che deve sopportare lo sforzo F. Ora le sezioni di un solido ad asse verticale, il quale si trovi sotto l'azione del peso F applicato nell'estremità inferiore, devono sopportare sforzi diversi; si tratta di trovare la forma del solido, affinchè l'unità di area in ciascuna sezione presenti eguale resistenza all'estensione; in questo caso il solido dicesi di eguale resistenza all'estensione. Poniamo:

h l'altezza del prisma,

γ il peso dell'unità di volume,

A area della sezione inferiore, nella quale è applicato il peso P.

Sia Oo (*Fig.* 1) l'asse del solido incastrato nell'estremità superiore, si divida la lunghezza $OH = x$ in un numero n grandissimo di parti uguali a δ. Siano ω_1, ω_2, ω_3, . . . le aree delle sezioni trasversali poste alle distanze 1δ, 2δ, 3δ, . . . dalla estremità inferiore.

I pesi di ciascun elemento di solido compreso tra due sezioni successive saranno $A\delta\gamma$, $\omega_1\delta\gamma$, $\omega_2\delta\gamma$, . . .

L'area ω_1, che deve sopportare la forza $F = K_1 A$ ed il peso $A\delta\gamma$, risulta dall'equazione $K_1 A + A\delta\gamma = K_1\omega_1$, da cui:

$$\omega_1 = A\left(1 + \frac{\delta\gamma}{K_1}\right) \qquad (1),$$

la successiva sezione

$$\omega_2 = \frac{1}{K_1}\left[K_1 A + A\delta\gamma + \omega_1\delta\gamma\right] = A\left[1 + \frac{\delta\gamma}{K_1}\right]^2,$$

così:

$$\omega_3 = A\left[1 + \frac{\delta\gamma}{K_1}\right]^3$$

. . . .

$$\omega_n = A\left[1 + \frac{\delta\gamma}{K_1}\right]^n.$$

$$\text{Ora}\quad \left(1 + \frac{\delta\gamma}{K_1}\right)^n = 1 + n\frac{\delta\gamma}{K_1} + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{\delta\gamma}{K_1}\right)^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ 3}\left(\frac{\delta\gamma}{K_1}\right)^3 + \ldots$$

Essendo n grandissimo, si potrà prendere $n(n-1) = n^2$, $n(n-1)(n-2) = n^3$ . . . , la lunghezza $n\delta$ poi è eguale ad $OH = x$, quindi:

$$\left(1+\frac{\delta\gamma}{K_1}\right)^n=1+x\frac{\gamma}{K_1}+\frac{x^2}{2}\left(\frac{\gamma}{K_1}\right)^2+\frac{x^3}{2.3}\left(\frac{\gamma}{K_1}\right)^3+\ldots$$

$$=e^{\frac{x\gamma}{K_1}} \qquad \text{(Nota I)}.$$

rappresentando e la base dei logaritmi naturali; quindi l'area della sezione del solido di eguale resistenza, posta a distanza x dalla base, è

$$\omega=A\,e^{\frac{x\gamma}{K_1}} \qquad (I),$$

da cui

$$\log.\omega=\log.A+0{,}434\frac{\gamma x}{K_1}.$$

Esempio. Sia una spranga di 100 metri di lunghezza ad asse verticale, caricata di un peso $P=2000$ chilogrammi nel centro di gravità della base inferiore.

Sia di chilogrammi 0,001 il peso del c.m.c. del materiale della spranga, sia $K_1=20$ chilogrammi il coefficiente di resistenza alla rottura per estensione, riferito al c.m.q. La base inferiore $A=\frac{2000}{20}=100$ c.m.q.

La sezione superiore, ossia quella d'incastro, sarà data da

$$100\,e^{\frac{0{,}001\cdot 10000}{20}}=164{,}8 \text{ c.m.q.}$$

La sezione intermedia, posta a distanza x dall'estremità inferiore, avrà l'area $\omega=100\,e^{\frac{x\cdot 0{,}001}{20}}$.

CAPITOLO III.

RESISTENZA ALLA COMPRESSIONE.

§ 7. Equazioni di stabilità. — In un corpo prismatico viene cimentata la resistenza alla compressione, quando le forze estrinseche, aventi la risultante diretta secondo l'asse, tendono a produrre nelle fibre uno schiacciamento, che il più delle volte è accompagnato da incurvamento. Se il rapporto tra l'altezza e la minima dimensione della sezione trasversale è tale da potersi trascurare l'inflessione, allora le fibre senza alterazione di elasticità potranno subire un accorciamento α, il quale, da numerose esperienze, venne trovato proporzionale direttamente alla forza p, che lo produce, alla lunghezza l del prisma, ed inversamente alla sezione trasversale a, quindi:

$$\alpha = \frac{pl}{aE_1} \qquad (I),$$

nella quale E_1 rappresenta il modulo di elasticità relativo alla compressione.

Con ragionamento analogo a quello tenuto nel § 4, si potranno stabilire le seguenti relazioni:

$$\lambda_1 = \frac{R_1}{E_1} \qquad (II),$$

$$p = R_1 a \qquad (III),$$

nella quale, λ_1 è il massimo accorciamento, che può subire il corpo prismatico di lunghezza $=1$ senza alterazione di elasticità, R_1 è lo sforzo atto a produrre tale accorciamento in un prisma, la cui sezione ha l'area $=1$.

Parimente nei prismi assoggettati ad uno sforzo di compressione, le resistenze alla rottura sono proporzionali alle aree delle sezioni cimentate, quindi si avrà la condizione di stabilità:

$$F = n_2 K_2 A \qquad (IV),$$

nella quale: F è la forza, che tende a schiacciare il prisma,

n_2 il coefficiente di stabilità,

K_2 il coefficiente di resistenza alla rottura per pressione, riferito all'unità di area,

A l'area della sezione trasversale del prisma.

Osservazione. Nel Capitolo VII si studierà la resistenza alla compressione, nel caso in cui lo schiacciamento è accompagnato da incurvamento.

CAPITOLO IV.

RESISTENZA ALLA FLESSIONE NEI PRISMI RETTILINEI SOLLECITATI DA FORZE LA CUI RISULTANTE È NORMALE ALL'ASSE.

Articolo I. — Equazioni di stabilità.

§ 8. Condizioni di equilibrio tra le forze estrinseche e le intrinseche sviluppate dalla sezione di un prisma inflesso. — In un solido prismatico viene cimentata la resistenza alla flessione, quando si trova sotto l'azione di una o più forze che tendono ad incurvarlo.

Sia il prisma ABCD (*Fig.* 2) ad asse rettilineo sollecitato da forze, aventi la risultante P normale all'asse.

L'incurvamento, che si produce, cimenta la resistenza alla estensione nelle fibre poste negli strati superiori, e la resistenza alla compressione in quelle degli strati inferiori. L'allungamento o l'accorciamento subìto dalle fibre, va diminuendo dall'esterno verso l'interno, dove si trova uno strato detto delle fibre neutre, che non provano alcuna alterazione nella loro lunghezza. L'intersezione del piano, che contiene le forze, collo strato delle fibre neutre dicesi *linea elastica;* la normale alla linea elastica, giacente nello strato delle fibre neutre, dicesi *asse neutro.*

Una sezione qualunque GF del prisma sviluppa forze molecolari, le quali per l'equilibrio si riducono:

1° Ad una forza F, eguale e contraria alla P, la quale tende a produrre nel prisma una rottura normale all'asse.

2° Ad una coppia M, eguale e contraria al momento statico delle forze estrinseche rispetto al centro di gravità della sezione, la quale è sollecitata a rotare intorno all'asse neutro o_1o_2.

Quest'asse o_1o_2, nella sezione GF, separa la parte, nella quale vien cimentata l'estensione, dalla o_1Fo_2 compressa, e la risultante delle resistenze all'estensione presentate da o_1Go_2 deve essere

eguale e contraria alla risultante delle resistenze sviluppate da o_1Fo_2.

La posizione dunque dell'asse neutro dipende non solo dalla forma della sezione, ma ancora dal rapporto dei coefficienti K_1, K_2 di resistenza alla rottura per estensione e per compressione. Se il valore di K_1 per un dato materiale eguaglia K_2, se la sezione del prisma è simmetrica rispetto ad un asse normale al piano, che contiene le forze, allora l'asse neutro coincide con l'asse di simmetria.

Quando K_1 è diverso da K_2, allora l'asse neutro non coincide coll'asse di simmetria e divide la sezione nelle parti o_1Go_2, o_1Fo_2, le quali soddisfano alla condizione $K_1\,(o_1Go_2) = K_2\,(o_1Fo_2)$.

Passiamo ora a stabilire le condizioni di equilibrio tra le forze intrinseche, e le estrinseche applicate nel prisma. Siano ab, $a'b'$ due sezioni vicinissime condotte normalmente all'asse MN nei punti o ed o'. Dal punto o conducasi la retta cd parallela ad $a'b'$, prima dell'incurvamento le fibre comprese tra queste due sezioni avevano la lunghezza costante $oo' = a'c = sr = b'd$; dall'inflessione lo strato $a'c$ venne allungato di ca, nk di km; mentre lo strato sr venne accorciato di pr, $b'd$ di bd. Prolungansi le rette ab, $a'b'$ normali all'asse fino al loro punto d'incontro in E, le rette oE, o'E diconsi raggi di curvatura dell'arco oo'. Siano:

z e z' le distanze degli strati mn ed sp dallo strato delle fibre neutre,

ω e ω' le aree delle sezioni delle fibre mn ed sp,

$\epsilon = mk$ allungamento subìto dalla fibra mn,

p la forza capace di produrre tale allungamento,

$\epsilon' = rp$ accorciamento subìto da sp,

p' la forza atta a produrre tale accorciamento,

$l = oo'$ distanza tra le sezioni $a'b'$ e cd.

Dalla similitudine dei triangoli kmo, $o'o$E risulta la proporzione $mk : ko = oo' : o'E$, ossia $\epsilon : z = l : \rho$, da cui:

$$\epsilon = \frac{lz}{\rho} \qquad (1).$$

La forza atta ad allungare di ϵ un prisma di lunghezza l e di sezione ω è $p = \frac{E\epsilon}{l}\omega$ (2);

ponendo per ϵ il suo valore, si ha:

$$p = \frac{E}{l}\,\omega\,\frac{lz}{\rho} = \frac{E}{\rho}\,\omega\,z \qquad (3),$$

dunque la resistenza all'estensione, presentata dalla fibra di sezione ω posta a distanza z dallo strato delle fibre neutre, eguaglia il prodotto dei tre fattori $\frac{E}{\rho}$, ω e z.

Per i materiali da costruzione si può senza grave errore porre $E = E'$, quindi la resistenza alla compressione, presentata dalla fibra di sezione ω', posta a distanza z' dallo strato delle fibre neutre, sarà:

$$p' = \frac{E}{\rho} z' \omega' \quad (4).$$

Ora sarà facile trovare la risultante delle resistenze presentate da una sezione del prisma. Si immagini scomposta la sezione $o_1 G o_2 F$ in tanti piccoli elementi, siano:

$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_n$ le aree di ciascuno degli elementi posti al disopra dello strato delle fibre neutre,

$z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$ le distanze rispettive dall'asse neutro,

$\omega_1', \omega_2', \omega_3', \ldots \omega_n'$ le aree di ciascuno degli elementi, posti al disotto dell'asse nentro,

$z_1', z_2', z_3', \ldots z_n'$ le rispettive distanze da $o_1 o_2$.

La somma delle resistenze presentate da $o_1 G o_2$ risulta da

$$\frac{E}{\rho}(\omega_1 z_1 + \omega_2 z_2 + \omega_3 z_3 + \ldots + \omega_n z_n) \quad (5),$$

la risultante di quelle sviluppate da $o_1 F o_2$ vien data da

$$\frac{E}{\rho}(\omega_1' z_1' + \omega_2' z_2' + \omega_3' z_3' + \ldots + \omega_n' z_n') \quad (6).$$

Per l'equilibrio, il momento statico W delle forze intrinseche rispetto all'asse $o_1 o_2$, deve eguagliare il momento statico M della forza estrinseca P rispetto allo stesso asse. Ora:

$$W = \frac{E}{\rho}\Big[(\omega_1 z_1^2 + \omega_2 z_2^2 + \omega_3 z_3^2 + \ldots \omega_n z_n^2) + (\omega_1' z_1'^2 +$$

$$+ \omega_2' z_2'^2 + \ldots + \omega_n' z_n'\Big] = \frac{E}{\rho}\Big\{\Sigma(\omega z^2) + \Sigma(\omega' z'^2)\Big\}.$$

Il fattore $\Sigma(\omega z^2) + \Sigma(\omega' z'^2)$ è il momento d'inerzia T della sezione rispetto all'asse $o_1 o_2$, quindi:

$$W = \frac{ET}{\rho} \qquad (I).$$

Il valore di M, detto *momento inflettente*, viene dato dal prodotto della risultante P per la sua distanza x dalla sezione, che si considera, quindi una delle condizioni di equilibrio sarà:

$$Px = \frac{ET}{\rho} \qquad (II),$$

nella quale: T dipende dalla forma della sezione, E dalle proprietà fisiche della materia, ρ dall'incurvamento, che subisce il prisma.

L'altra condizione sarà $P = F$ resistenza che si sviluppa, mentre nel corpo tende a manifestarsi la rottura per *scorrimento trasversale*. Tale equazione d'equilibrio si potrà scrivere

$$P = K_3 \Omega \qquad (III),$$

nella quale K_3 è un coefficiente costante dipendente dalla materia, Ω è l'area della sezione.

§ 9. **Momento di resistenza alla rottura.** — La porzione $a'b'cd$, di prisma, per l'inflessione, ha preso la posizione $a'b'ba$, gli allungamenti ca, km degli strati $a'c$, nk sono proporzionali alle distanze oc, ok dall'asse o; parimente gli accorciamenti bd, pr degli strati $b'd$, sr sono proporzionali alle distanze od, or; quindi le fibre, che devono presentare la maggiore resistenza alla rottura, sono le più lontane dall'asse, e le resistenze sviluppate dalle intermedie saranno proporzionali alla loro distanza dallo strato delle fibre neutre.

La fibra di sezione ω_n posta alla massima distanza $o'a' = d_1$ dall'asse, presenta nel punto, in cui sta per rompersi, la resistenza $K_1\omega_n$, essendo K_1 il coefficiente di resistenza alla rottura per estensione; mentre la fibra mn di sezione ω posta a distanza z sviluppa la resistenza $k\omega$.

Se $\omega_n = \omega$, per il noto principio, che le resistenze presentate dalle fibre nm, aa' di eguale lunghezza, sono proporzionali agli allungamenti mk, ac, si ha $k\omega : K_1\omega = (mk) : (ac)$.

Dalla similitudine dei triangoli *okm*, *oca* risulta la proporzione $(mk):(ac) = z : d_1$, quindi $kw : K_1 w = z : d_1$, da cui:

$$kw = \frac{K_1}{d_1} w z \qquad (1),$$

quindi una fibra qualunque, posta al disopra di $o_1 o_2$, presenta una resistenza all'estensione, la quale è data dal prodotto del rapporto costante $\frac{K_1}{d_1}$, per l'area w della sua sezione e per la distanza z dall'asse $o_1 o_2$.

Si scomponga l'area $o_1 G o_2$ in numero n grandissimo di parti, siano:

$w_1, w_2, w_3, \ldots w_n$ le aree degli elementi,

$z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$ le rispettive loro distanze dall'asse neutro.

La somma delle resistenze presentate dalle sezioni di fibre poste in $o_1 G o_2$ sarà:

$$\frac{K_1}{d_1}(w_1 z_1 + w_2 z_2 + w_3 z_3 + \ldots + w_n z_n) = \frac{K_1}{d_1} \Sigma (wz) \qquad (2).$$

Ragionando analogamente, si otterrà, che la risultante di tutte le resistenze sviluppate nella porzione $o_1 F o_2$, sarà data da

$$\frac{K_2}{d_2} \Sigma (w' z') \qquad (3),$$

essendo: K_2 il coefficiente di resistenza alla rottura per compressione, d_2 la distanza della fibra più compressa dallo strato delle fibre neutre.

Per stabilire in un prisma incurvato la condizione di equilibrio tra la somma delle resistenze presentate dalla sezione *ab* e la forza P applicata in N, si riferisca tutto il sistema delle forze all'asse O, il quale si considera come asse di rotazione, intorno al quale tende a rotare tutto il sistema delle forze. Il momento statico delle forze intrinseche rispetto a tale asse, è dato da

$$\frac{K_1}{d_1}\left\{w_1 z_1^2 + w_2 z_2^2 + w_3 z_3^2 + \ldots + w_n z^{n2}\right\} + \frac{K_2}{d_2}\left\{w_1' z_1'^2 + \right.$$

$$\left. + w_2' z_2'^2 + \ldots w_n' z_n'^2\right\} = \frac{K_1}{d_1} \Sigma (wz^2) + \frac{K_2}{d_2} \Sigma (w' z'^2) \qquad (I).$$

Il momento M della forza estrinseca P è dato da Px, quindi per l'equilibrio si ottiene:

$$Px = \frac{K_1}{d_1} \Sigma\,(\ z^2) + \frac{K_2}{d_2} \Sigma\,(\omega' z'^2) \qquad \text{(II)}.$$

Il secondo membro di questa eguaglianza dicesi *momento di resistenza alla rottura*, perchè le fibre più compresse e più estese si trovano nel punto, in cui stanno per rompersi. Appena manifestata la rottura nelle fibre più lontane dallo strato neutro, diminuisce la resistenza della sezione, e le fibre degli strati successivi l'una dopo l'altra si rompono.

§ 10. **Equazione generale di stabilità.** — Le numerose esperienze eseguite sopra i materiali, impiegati nelle costruzioni, ci hanno fatto conoscere, che dentro certi limiti la resistenza alla rottura per estensione, presentata dall'unità di area della sezione, eguaglia la resistenza alla rottura per compressione. Esprimiamo con R il valore della resistenza presentata all'estensione od alla compressione dall'unità di area della sezione di un prisma, se l'asse neutro è un asse di simmetria della sezione di altezza h, allora $d_1 = d_2 = \frac{1}{2} h$; $K_1 = K_2 = R$, quindi:

$$W = \frac{R}{\frac{1}{2} h} \left[\Sigma\,(\omega z^2) + \Sigma\,(\omega' z'^2). \right].$$

Ma il fattore $\Sigma\,(\omega z^2) + \Sigma\,(\omega' z'^2) = T$ momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro, quindi:

$$W = \frac{RT}{\frac{1}{2} h} \qquad \text{(I)}.$$

Il momento della forza estrinseca P rispetto ad ab è Px, quindi per l'equilibrio si ottiene:

$$Px = \frac{RT}{\frac{1}{2} h} \qquad \text{(II)}.$$

Ora il momento Px venne nel § 8 trovato eguale ad $\frac{ET}{\rho}$, quindi, per essere due quantità eguali ad una terza eguali tra loro, si ha:

$$\frac{ET}{\rho}=\frac{RT}{\frac{1}{2}h} \qquad \text{(III)}.$$

Il momento statico W delle forze intrinseche sviluppate da una sezione rispetto al suo asse neutro, è dato dal prodotto di R quantità variabile colla materia del prisma, per $\frac{T}{\frac{1}{2}h}$ dipendente dalla forma della sezione; andiamo ora dunque a trovare i valori del momento di resistenza $\frac{RT}{\frac{1}{2}h}$ per diverse sezioni più impiegate nelle costruzioni.

§ 11. **Momento di resistenza della sezione rettangolare.** — Sia ABCD (*Fig.* 3) una sezione rettangolare di base AB $=$ CD $= b$ e di altezza AC $=$ BD $= h$, la retta o_1o_2 che sega per metà i lati paralleli AC, BP coincida con l'asse neutro. Si divida la retta o_1A in un numero n di parti eguali a δ, si conducano dai punti di divisione rette parallele ad AB, così la porzione o_1o_2BA verrà scomposta in un numero n di rettangoli, ciascuno dei quali avrà per area $b\delta$. Le distanze successive di ciascun strato da o_1o_2 sono 1δ, 2δ, 3δ, . . . 4δ quindi il momento d'inerzia di o_1o_2BA, rispetto all'asse o_1o_2, risulta da

$$T_1 = b\delta \left\{ (1\delta)^2 + (2\delta)^2 + (3\delta)^2 + \ldots + (n\delta)^2 \right\} =$$

$$= b\delta^3 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2).$$

Se n è un numero grandissimo, allora:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3}, \qquad \text{(Nota II)},$$

quindi:

$$T_1 = \frac{bn^3\,\delta^3}{3} = \frac{1}{3}\,b\left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{1}{24}\,bh^3 \qquad (1);$$

il momento d'inerzia di o_1CDo_2 rispetto ad o_1o_2 sarà dunque

$$T_2 = \frac{1}{24}\, bh^3 \qquad (2),$$

il momento d'inerzia di tutta la sezione rispetto ad o_1o_2, ossia

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{12}\, bh^3 \qquad (I).$$

Ponendo per T il suo valore, il momento di resistenza della sezione rettangolare sarà:

$$W = \frac{R}{\frac{1}{2}h}\;\frac{1}{12}\, bh^3 = \frac{1}{6}\, Rbh^2 \qquad (II).$$

Esprimendo con F l'area bh del rettangolo, si ottiene:

$$W = \frac{1}{6}\, RFh \qquad (III).$$

Il momento di resistenza dunque della sezione rettangolare è proporzionale direttamente alla sua area ed all'altezza.

I momenti di resistenza di più sezioni rettangolari di eguale area saranno proporzionali alle loro altezze.

§ 12. **Momento di resistenza della sezione rettangolare vuota e della sezione a doppio T simmetrica.** — Le sezioni ABCD (*Fig.* 4 *e* 5) sieno composte di rettangoli e l'asse neutro coincida con o_1o_2 asse di simmetria. Poniamo per la fig. 4ª:

b = AB = CD la base del rettangolo esterno ABDC,
h = AC = BD la sua altezza,
b' = ab = cd la base del rettangolo interno $abdc$,
h' = ac = bd la sua altezza.

Si scomponga l'area ABo_1o_2 con rette parallele alla base, in rettangoletti di altezza costante δ; se n è il numero di rettangoletti compresi tra o_1o_2 ed ab; ed m è quello dei rettangoletti posti tra ab ed AB, si avrà:

$n\delta = \frac{1}{2}\, h' = o\,a = o'b$ semi-altezza del rettangolo $abcd$,

$$m\delta = \frac{1}{2}(h - h') = \text{altezza del rettangolo } a'b'\text{BA},$$

$$(m + n)\,\delta = \frac{1}{2}h = \text{semi-altezza del rettangolo ABDC.}$$

Ora $aa' + bb' = \text{AB} - ab = b - b'$, quindi l'area di ciascuno dei rettangoletti compresi tra o_1o_2 ed $a'b'$ è data da $(b - b')\,\delta$; le successive distanze dall'asse neutro sono 1δ, 2δ, $3\delta \ldots n\delta$. L'area di ciascuno dei rettangoletti posti da AB ed $a'b'$ ha per area $b\delta$, le successive distanze da o_1o_2 sono $(n + 1)\,\delta$, $(n + 2)\,\delta \ldots (n + m)\,\delta$, quindi il momento d'inerzia di AB$d'd$ rispetto ad o_1o_2 è:

$$\mathrm{T}_1 = (b - b')\,\delta\left[(1\delta)^2 + (2\delta)^2 + \ldots + (n\delta)^2\right] + b\delta\left[\left((n + 1)\,\delta\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left((n + 2)\,\delta\right)^2 + \ldots + \left((n + m)\,\delta\right)^2\right] = b\delta^3\,\frac{(n + m)^3}{3} - b'\delta^3\,\frac{n^3}{3} =$$

$$= \frac{1}{3}b\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\,b'\left(\frac{h'}{2}\right)^3 = \frac{1}{24}\,b\,h^3 - \frac{1}{24}\,b'h'^3 \qquad (1).$$

Il momento d'inerzia della parte posta al disotto dell'asse neutro è:

$$\mathrm{T}_2 = \frac{1}{24}\,(bh^3 - b'h'^3), \qquad (2);$$

quindi il momento d'inerzia di tutta la sezione sarà:

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 = \frac{1}{12}\,(bh^3 - b'h'^3) \qquad (\mathrm{I}),$$

ed il momento di resistenza risulta:

$$\frac{\mathrm{R}}{\frac{1}{2}h}\,\frac{1}{12}\,(bh^3 - b'h'^3) = \frac{1}{6}\,\mathrm{R}\,\frac{bh^3 - b'h'^3}{h} \qquad (\mathrm{II}).$$

Poniamo per la sezione ABCD della fig. 5ª: $AB = b$, $AC = BD = h$, $eg = fi = h'$, ed $ae + fb = cg + id = b'$, si avrà ancora:

$$T = \frac{1}{12} (bh^3 - b'h'^3) \qquad (I)_a,$$

$$W = \frac{1}{6} R \frac{bh^3 - b'h'^3}{h} \qquad (II)_a,$$

i quali valori di T e di W possono essere scritti nel seguente modo; esprimiamo con a lo spessore del gambo $efgi$, allora risulta $b' = b - a$, ponendo tale valore in $(I)_a$, $(II)_a$, si ottiene:

$$T = \frac{1}{12} [b (h^3 - h'^3) + ah'^3] \qquad (III),$$

$$W = \frac{1}{6} R \frac{b(h^3 - h'^3) + ah'^3}{h} \qquad (IV).$$

§ 13. **Momento di resistenza della sezione circolare.** — Sia il circolo AEBD (*Fig.* 6) di raggio r, l'asse neutro coincida col diametro AB. Scompongasi il circolo in un numero n di corone circolari di larghezza costante δ, sarà il raggio $CD = r = n\delta$.

Consideriamo la corona circolare $efhg$, sia Ω la sua area, ed ω quella di un piccolo elemento posto in a, il quale dista di $ab = x$ dal diametro XX^1, e di $ad = z$ dall'asse neutro o_1o_2. Pongasi il raggio $Ac = \rho$.

Il momento d'inerzia di ω rispetto ad $o_1o_2 = \omega z^2$,
» » » $XX^1 = \omega x^2$,
» » al centro $C = \omega \rho^2$.

Essendo $\rho^2 = x^2 + z^2$ si avrà $\omega\rho^2 = \omega x^2 + \omega z^2$, la quale eguaglianza sussiste per tutte le aree ω, che distano ρ dal centro, quindi il momento d'inerzia dell'anello circolare $efgh$ rispetto al centro eguaglia la somma dei due momenti, l'uno rispetto ad o_1o_2, l'altro rispetto al diametro ortogonale XX^1, ossia:

$$\Sigma (\omega \rho^2) = \Sigma (\omega x^2) + \Sigma (\omega z^2) \qquad (1).$$

Ora: $\Sigma\,(\omega\,x^2) = \Sigma\,(\omega\,z^2)$, ρ è costante per la data corona, $\Sigma\,(\omega) = \Omega = 2\pi\rho\delta$ area della corona circolare *efhg*, quindi:

$$\Omega\rho^2 = 2\pi\delta\rho^3 = 2\,(\Sigma\omega z^2) \qquad (2).$$

Siano:

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots \Omega_n$ le aree dei successivi anelli circolari, nei quali venne scomposto il circolo.

$\rho_1 = 1\delta$, $\rho_2 = 2\,\delta$, $\rho_3 = 3\delta \ldots$, $\rho_n = n\,\delta$ i loro raggi rispettivi.

Ponendo nella (2) per Ω e per ρ successivamente i loro valori, si ottengono le seguenti equazioni:

$\Omega_1\rho_1^2 = 2\pi\delta(1\delta)^3$

$\Omega_2\rho_2^2 = 2\pi\delta(2\delta)^3$

. . . .

$\Omega_n\,\rho^2_n = 2\pi\delta\,(n\,\delta)^3$, dalle quali risulta:

$$\Sigma\,(\Omega\rho^2) = 2\pi\delta^4\,(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) = 2\pi\frac{n^4\,\delta^4}{4} = \frac{1}{2}\pi r^4.$$

Il momento d'inerzia del circolo rispetto al centro è doppio del momento d'inerzia del circolo rispetto ad un diametro, quindi il momento d'inerzia di tutto il circolo rispetto ad AB eguaglia la metà di $\frac{1}{2}\pi r^4$, ossia:

$$T = \frac{1}{4}\,\pi\,r^4 \qquad (I),$$

ed il momento di resistenza

$$W = \frac{R}{r}\;\frac{1}{4}\;\pi\,r^4 = \frac{1}{4}R\,\pi\,r^3 \qquad (II).$$

Ponendo l'area $\pi\,r^2 = F$, ed il diametro $2r = h$, si ottiene:

$$W = \frac{1}{8}\,RFh \qquad (III).$$

Il momento d'inerzia della *sezione anulare* rispetto al diametro, se r_1 è il raggio minore, ed r_2 è il minore, vien dato da

$$T = \frac{1}{4}\pi(r_1^4 - r_2^4) \qquad \text{(IV)},$$

ed il momento di resistenza risulta

$$W = \frac{1}{4} R\pi \frac{r_1^4 - r_2^4}{r_1} = \frac{1}{4} RF' \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1} \qquad \text{(V)},$$

esprimendo con F' l'area $\pi(r_1^2 - r_2^2)$ della corona circolare.

§ 14. Momento d'inerzia di sezioni rispetto ad un asse, che passa per il loro centro di gravità, senza dividerle in due parti simmetriche (*Fig.* 7). — Sia la sezione ABCD, sia G il suo centro di gravità, ed $o_1 o_2$ l'asse neutro. Conduciamo la retta XX_1 parallela ad $o_1 o_2$. Esprimiamo con T il momento d'inerzia della sezione rispetto ad $o_1 o_2$, con T_1 quello rispetto ad XX_1. Scomponiamo la parte della sezione posta al disopra di $o_2 o_2$ nelle aree $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots \omega_n$, che distano $z_1, z_2, z_3 \ldots z_n$ da $o_1 o_2$; così scomponiamo RSCD nelle aree $\omega_1', \omega_2', \omega'_3, \ldots \omega'_n$, che distano $z_1', z_2', z_3', \ldots z'_n$ da $o_1 o_2$, si avrà:

$$T = (\omega_1 z_1^2 + \omega_2 z_2^2 + \omega_3 z_3^2 + \ldots + \omega_n z_n^2) + (\omega'_1 z'^2_1 +$$
$$+ \omega'_2 z'^2_2 + \ldots \omega'_n z'^2_n).$$

Se d è la distanza delle due rette parallele $o_1 o_2$, XX^1 si ottiene:

$$T_1 = \{\omega_1 (d + z_1)^2 + \omega_2 (d + z_2)^2 + \ldots + \omega_n (d + z_n)^2\} +$$
$$+ \{\omega'_1 (d - z'_1)^2 + \omega_2^1 (d - z'_2)^2 + \ldots + \omega'_n (d - z'_n)^2\} =$$
$$= d^2 [(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n) + (\omega'_1 + \omega'_2 + \ldots + \omega'_n)] +$$
$$+ 2d [(\omega_1 z_1 + \omega_2 z_2 + \ldots + \omega_n z_n) - (\omega'_1 z'_1 + \omega'_2 z'_2 + \ldots + \omega'_n z'_n)] +$$
$$+ [(\omega_1 z_1^2 + \omega_2 z_2^2 + \ldots + \omega_n z_n^2) + (\omega'_1 z'^2_1 + \omega'_2 z'^2_2 + \ldots + \omega'_n z'^2_n)].$$

Il fattore di d^2 eguaglia l'area F di tutta la sezione; quello di $2d$ eguaglia zero, perchè o_1o_2 passa per il centro di gravità G; la somma $\omega_1 z_1^2 + \omega_2 z_2^2 + \ldots + \omega_n z_n^2 + \omega'_1 z'^2_1 + \omega'_2 z'^2_2 + \ldots + \omega'_n z'_n = T$, quindi risulta:

$$T_1 = d^2F + T,$$

da cui:

$$T = T_1 - d^2F \qquad (1),$$

dunque il momento d'inerzia, rispetto ad un asse passante per il centro di gravità della sezione, eguaglia il momento d'inerzia della sezione rispetto ad un asse parallelo al primo, diminuito del prodotto dell'area della sezione per il quadrato della distanza dei due assi paralleli.

§ 15. Momento di resistenza della sezione semicircolare. — Sia il semicircolo ABD (*Fig.* 8) di raggio $CA = r$. Sia o il suo centro di gravità, il quale dista di $\frac{4r}{3\pi}$ dal diametro AC. Siano T_1 e T i momenti d'inerzia della sezione semicircolare, l'uno rispetto al diametro AB, l'altro rispetto alla retta o_1o_2 condotta da o parallelamente ad AB. Dalla (I) del § 14 risulta:

$$T = T_1 - \overline{oC}^2 \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{8}\pi r^4 - \left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 \frac{1}{2}\pi r^2 = 0{,}11\, r^4 \quad (I).$$

Il momento di resistenza W, sostituendo per T il suo valore, risulta $= \frac{R}{\frac{1}{2}h} 0{,}11 r^4$. Ora $\frac{1}{2}h = oD = r - oC = r - \frac{4r}{3\pi} = 0{,}57r$, quindi:

$$W = 0{,}193Rr^3 \qquad (II).$$

§ 16. Momento di resistenza della sezione triangolare con base orizzontale. — La sezione triangolare ADC (*Fig.* 9) abbia la base AD orizzontale. Siano o_1o_2 ed XX' due rette condotte parallelamente alla base, la prima dal centro di gravità, la seconda dal vertice C del triangolo. Scomponiamo l'area ADC in un numero n di parti, con rette condotte parallelamente alla base a distanza δ l'una dall'altra. Poniamo l'altezza del trian-

golo $= h = n\delta$, la base AD $= b$, il momento d'inerzia rispetto ad $o_1 o_2 = T$, e quello rispetto ad $XX' = T_1$.

Le aree elementari, nelle quali venne scomposto il triangolo, si possono considerare rettangolari di altezza costante δ, e le loro superficie $\frac{1b}{n}\delta$, $\frac{2b}{n}\delta$, $\frac{3b}{n}\delta$, ... $\frac{nb}{n}\delta$; avranno i momenti d'inerzia rispetto ad XX' espressi successivamente da $\frac{1b}{n}\delta\,(1\delta)^2$, $\frac{2b}{n}\delta\,(2\delta)^2$, ... $\frac{nb}{n}\delta\,(n\delta)^2$; quindi il momento d'inerzia

$$T_1 = \frac{b\delta^3}{n}(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) = \frac{b}{4}(n\delta)^3 = \frac{1}{4}bh^3 \qquad \text{(I)}.$$

Dalla (I) del § 14 risulta:

$$T = T_1 - \left(\frac{2}{3}h\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{4} - \frac{2}{9}bh^3,$$

da cui:

$$T = \frac{1}{36}bh^3 \qquad \text{(II)}.$$

La distanza del centro di gravità dal vertice C eguaglia $\frac{2}{3}$ dell'altezza, ossia $\frac{2}{3}h$; quindi il momento di resistenza

$$W = \frac{R}{\frac{2}{3}h}\frac{1}{36}bh^3 = \frac{1}{24}Rbh^2 \qquad \text{(III)}.$$

Ma l'area del triangolo è $F = \frac{1}{2}bh$, quindi:

$$W = \frac{1}{12}RFh \qquad \text{(IV)}.$$

§ 17. **Momento di resistenza della sezione a doppio T non simmetrica.** — Sia la sezione ABCD (*Fig.* 10) a doppio T, chiamiamo:

h l'altezza AC = BD della sezione,

h_1 l'altezza $eg = fk$ del gambo,

b_1, b_2, b_3 le basi CD, AB, ef dei rettangoli CDdc, ABba, $efkg$,

c_1, c_2 le altezze Dd, Bb dei rettangoli CDde, ABba,

F_1, F_2, F_3 le aree dei rettangoli CDdc, ABba, $efkg$,

z_1, z_2, z_3 le distanze dei loro centri di gravità dall'asse XX'.

Sia o_1o_2 una retta tirata dal centro di gravità della sezione parallelamente alla base CD. La distanza di o_1o_2 da CD risulta

$$d = \frac{F_1 z_1 + F_2 z_2 + F_3 z_3}{F_1 + F_2 + F_3}.$$

Il momento d'inerzia

di CDdc rispetto ad XX' è $T_1' = \frac{1}{3} b_1 c_1^3$,

di ABba » » $T_1'' = \frac{1}{3} b_2 [h^3 - (h_1 + c_1)^3]$,

di $efkg$ » » $T_1''' = \frac{1}{3} b_3 [h_1^3 - c_1^3]$,

quindi il momento d'inerzia di tutta la sezione rispetto a CD viene dato da

$$T_1 = T_1' + T_1'' + T_1''' = \frac{1}{3} \left\{ b_1 c_1^3 + b_2 [h^3 - (h_1 + c_1)^3] + \right.$$

$$\left. + b_3 (h_1^3 - c_1^3) \right\} \qquad \text{(I)}.$$

Il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse o_1o_2 passante per il centro di gravità, si ottiene dall'eguaglianza

$$T = \frac{1}{3} \left\{ b_1 c_1^3 + b_2 [h^3 - (h_1 + c_1)^3] + b_3 (h_1^3 - c_1^3) \right\} -$$

$$- d^2 (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 h_1) \qquad \text{(II)}.$$

La distanza dello strato di fibre, che presentano maggior pericolo alla rottura, dall'asse è $h - d$ quando $d < \frac{1}{2} h$; è invece $h - h + d$ quando $d > \frac{1}{2} h$.

Nel primo caso il momento di resistenza

$$W = \frac{R}{h-d} T \qquad \text{(III)},$$

nel secondo caso invece

$$W = \frac{R}{d} T \qquad \text{(III)}_a.$$

§ 18. **Momento di resistenza della sezione trasversale di un corpo prismatico, quando i coefficienti K_1 e K_2 hanno valori diseguali.** — Secondo i principii stabiliti nel § 8, la risultante delle resistenze presentata dalla porzione di sezione, posta al di sopra dell'asse neutro, eguaglia la somma delle resistenze sviluppate nella restante parte, quindi i valori (2), (3) di tali resistenze, trovati nel § 9, sono eguali, perciò:

$$\frac{K_1}{d_1} \Sigma(\omega z) = \frac{K_2}{d_2} \Sigma(\omega' z') \qquad (1).$$

Dalla (1) del § 9 si vede che la fibra di sezione ω, posta a distanza z dallo strato delle fibre neutre, presenta all'estensione una resistenza $k_1\omega = \frac{K_1}{d_1}\omega z$, e la fibra di sezione ω', posta dall'altra parte dell'asse neutro a distanza z', sviluppa la resistenza alla compressione $k_2\omega' = \frac{K_2}{d_2}\omega' z'$.

Se $\omega = \omega' = 1$, $z = z' = 1$ allora si ha: $k_1 = \frac{K_1}{d_1}$, $k_2 = \frac{K_2}{d_2}$, i quali valori sostituiti in (1) dànno:

$$k_1 \Sigma(\omega z) = k_2 \Sigma(\omega' z') \qquad (2),$$

da cui:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\Sigma(\omega' z')}{\Sigma(\omega z)} \qquad (3).$$

Sia la sezione ABCD (*Fig.* 11) a doppio T non simmetrica, sia o_1o_2 la posizione dell'asse neutro posto a distanza d_1 da AB, ed a distanza d_2 da DC. Poniamo:

F_1 l'area della parte di sezione posta sopra o_1o_2;

F_2 l'area della parte di sezione posta al disotto,

Z_1 la distanza del centro di gravità di ABmn da $o_1 o_2$,

Z_2 la distanza del centro di gravità di CDnm da $o_1 o_2$.

Ora $\Sigma(\omega z) = F_1 Z_1$, $\Sigma(\omega' z') = F_2 Z_2$, ponendo tali valori in (1) ed in (3), si ottiene:

$$\frac{K_1}{d_1} F_1 Z_1 = \frac{K_2}{d_2} F_2 Z_2 \qquad \text{(I)},$$

$$\frac{F_1 Z_1}{F_2 Z_2} = \frac{k_2}{k_1} \qquad \text{(II)}.$$

Siano:

b_1, c_1 la base AB e l'altezza Bb del rettangolo Ab,

b_2, c_2 la base CD e l'altezza Dd del rettangolo Cd,

b_3 lo spessore del gambo,

h l'altezza totale della sezione, si avrà:

$$\Sigma(\omega z) = F_1 Z_1 = b_1 c_1 \left(d_1 - \frac{c_1}{2}\right) + \frac{1}{2} b_3 (d_1 - c_1)^2.$$

$$\Sigma(\omega' z') = F_2 Z_2 = \frac{1}{2} b_2 c_2 (2h - 2d_1 - c_2) + \frac{1}{2} b_3 (h - d_1 - c_2)^2.$$

Ponendo tali valori in (II), si ottiene:

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{b_1 c_1 (2d_1 - c_1) + b_3 (d_1 - c_1)^2}{b_2 c_2 (2h - 2d_1 - c_2) + b_3 (h - d_1 - c_2)^2} \qquad \text{(III)},$$

la quale servirà per trovare il valore di d_1, e perciò fissare la posizione dell'asse neutro $o_1 o_2$, quando sia noto il rapporto $\frac{k_2}{k_1}$.

Ora il momento di resistenza $W = \frac{K_1}{d_1} \Sigma(\omega z^2) + \frac{K_2}{d_2} \Sigma(\omega' z'^2)$ (4),

il momento d'inerzia $\Sigma(\omega z^2) = \frac{1}{3} \left\{ b_1 d_1^3 - (b_1 - b_3)(d_1 - c_1)^3 \right\}$

» » $\Sigma(\omega' z'^2) = \frac{1}{3} \left\{ b_2 d_2^3 - (b_2 - b_3)(d_2 - c_2)^3 \right\}$,

i quali valori sostituiti in (4) dànno:

$$W = \frac{K_1}{3d_1}\left\{b_1 d_1^3 - (b_1 - b_3)(d_1 - c_1)^3\right\} +$$

$$+ \frac{K_2}{3d_2}\left\{b_2 d_2^3 - (b_2 - b_3)(d_2 - c_2)^3\right\} \qquad (IV).$$

Se la sezione è soltanto composta dei rettangoli AB*ba*, CD*dc*, allora le (III) e (IV) si trasformano nelle seguenti:

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{b_1 c_1 (2d_1 - c_1)}{b_2 c_2 (2h - 2d_1 - c_2)} \qquad (V).$$

$$W = \frac{K_1 b_1}{3d_1}\left[d_1^3 - (d_1 - c_1)^3\right] + \frac{K_2 b_2}{3d_2}\left[d_2^3 - (d_2 - c_2)^3\right] \quad (VI).$$

§ 19. Momento di resistenza della sezione a doppio T non simmetrica, nella quale si trascura il gambo. — Sia la sezione AD*da* (*Fig.* 12) composta dei rettangoli ADEF, coi lati AD, *ad* orizzontali; AF, *af* verticali. Siano:

b_1, c_1 i lati AD, AF del rettangolo ADFE,
F_1 la sua area,
z_1 la distanza del suo centro di gravità da $o_1 o_2$,
d_1, d_1' le distanze degli spigoli AD, FE dall'asse neutro $o_1 o_2$,
$T_1 = \Sigma(\omega z^2)$ il suo momento d'inerzia rispetto a tale asse,
b_2, c_2 i lati *ad*, *af* del rettangolo *adef*,
F_2 la sua area,
z_2 distanza del suo centro di gravità da $o_1 o_2$,
d_2, d_2' le distanze di *ad*, *ef* dall'asse $o_1 o_2$,
$T_2 = \Sigma(\omega' z'^2)$ il suo momento d'inerzia rispetto a tale asse,
$Z = z_1 + z_2$ distanza dei centri di gravità delle due sezioni.

Ora:

$$T_1 = \frac{1}{3} b_1 (d_1^3 - d_1'^3) \qquad (1).$$

$$T_2 = \frac{1}{3} b_2 (d_2^3 - d_2'^3) \qquad (2).$$

Ponendo tali valori nella (4) del § 18, si ottiene:

$$W = \frac{K_1 b_1}{3d_1}(d_1^3 - d_1'^3) + \frac{K_2 b_2}{3d_2}(d_2^3 - d_2'^3) \qquad (I).$$

Ora:

$$d_1 = z_1 + \frac{c_1}{2},\ d_1' = z_1 - \frac{c_1}{2},$$

quindi:

$$\frac{K_1 b_1}{3d_1}(d_1^3 - d_1'^3) = \frac{K b_1 z_1^2 c_1}{d_1}\left\{1 + \frac{c_1^2}{12 z_1^2}\right\}.$$

Se c_1 è molto piccolo rispetto a z_1, la frazione $\frac{c_1^2}{12z_1^2}$ è trascurabile, quindi ponendo $b_1 c_1 = F_1$ si avrà:

$$\frac{K_1 b_1}{3d_1}(d_1^3 - d_1'^3) = \frac{K_1 z_1^2}{d_1} F_1 \qquad (3),$$

perciò:

$$\frac{K_2 b_2}{3d_2}(d_2^3 - d_2'^3) = K_2 \frac{z_2^2}{d_2} F_2 \qquad (4),$$

quindi il momento di resistenza

$$W = \frac{K_1}{d_1} F_1 z_1^2 + \frac{K_2}{d_2} F_2 z_2^2 \qquad (II).$$

Ora dall'eguaglianza $\frac{K_1}{d_1} F_1 z_1 = \frac{K_2}{d_2} F_2 z_2$, che fissa la posizione dell'asse neutro, risulta:

$$W = \frac{z_1}{d_1} K_1 F_1 Z = \frac{z_2}{d_2} K_2 F_2 Z \qquad (III),$$

quando $K_1 F_1 = K_2 F_2$, l'asse $o_1 o_2$ divide per metà la distanza $m\,n$,

$$z_1 = z_2 = \frac{Z}{2};$$

perciò:

$$d_1 = z_1 + \frac{c_1}{2} = \frac{Z + c_1}{2},$$

$$d_2 = z_2 + \frac{c_2}{2} = \frac{Z + c_2}{2},$$

$$W = \frac{Z^2}{Z + c_1} K_1 F_1 = \frac{Z^2}{Z + c_2} K_2 F_2 \qquad \text{(IV)},$$

quando $c_1 = c_2$, allora $Z + c_1 = Z + c_2 = h$

$$W = \frac{Z^2}{h} K_1 F_1 = \frac{Z^2}{h} K_2 F_2 \qquad \text{(V)},$$

ora $\frac{Z^2}{h} = \frac{(h - c)^2}{h} = h - 2c + \frac{c^2}{h}$ per esser c piccolissimo rispetto ad h, si può senza grave errore porre $\frac{Z^2}{h} = h - 2c = h'$ altezza del gambo, quindi $W = h' K_1 F_1 = h' K_2 F_2$ (VI).

§ 20. **Equazioni di stabilità per un corpo prismatico ad asse orizzontale incastrato ad una estremità, sollecitato nell'altra da una forza verticale e nella sua lunghezza da un peso uniformemente distribuito.** — Il prisma ABDC (*Fig.* 13) incastrato nell'estremità AB, sia sollecitato in CD dal peso P, e nella sua lunghezza BD $= l$ dal peso pl, uniformemente distribuito. Poniamo:

x la distanza di una sezione qualunque dall'estremo CD,

M_x il momento statico delle forze estrinseche poste tra i punti C ed E rispetto al centro di gravità della sezione EF,

M il momento statico delle forze estrinseche P, pl rispetto al centro di AB,

W il momento di resistenza della sezione.

Ora:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= Px + \frac{1}{2} px^2 \\ M &= Pl + \frac{1}{2} pl^2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}.$$

Quando non vi ha alcun peso uniformemente distribuito, allora

$$p = o, \quad M_x = Px, \quad M = Pl \qquad (II).$$

Quando manca il peso P, allora

$$M_x = \frac{1}{2} px^2, \quad M = \frac{1}{2} pl^2 \qquad (III).$$

Ora per la stabilità deve W eguagliare il massimo valore di M_x ossia M, quindi:

$$Pl + \frac{1}{2} pl^2 = W \qquad (IV),$$

per $p = o$ si ha $Pl = W$ (V),

per $P = o$ » $\frac{1}{2} pl^2 = W$ (VI).

Ponendo per W il valore corrispondente alla forma della sezione, si potrà dalle (IV), (V), (VI) risolvere uno di questi problemi: o determinare lo sforzo che può sopportare un prisma di date dimensioni; o trovare una delle dimensioni della sezione trasversale di un corpo prismatico, che deve sopportare un dato carico.

Se la sezione è rettangolare di area F e di altezza h, allora:

$$W = \frac{1}{6} RFh,$$

e l'equazione di stabilità risulta

$$Pl + \frac{1}{2} pl^2 = \frac{1}{6} RFh,$$

da cui:

$$P + \frac{1}{2} pl = \frac{1}{6} \frac{RFh}{l} \qquad (VII).$$

Per sezione circolare il momento $W = \frac{1}{8} RFh$, perciò:

$$P + \frac{1}{2}\,pl = \frac{1}{8}\,\frac{RFh}{l} \qquad \text{(VIII)}.$$

Quando p rappresenta il peso dell'unità di lunghezza della trave, allora il suo valore viene dato dal prodotto dell'area F. per il peso γ dell'unità di volume, ossia $p = F\gamma$.

La (III) del § 8 dà luogo all'altra condizione di stabilità

$$K_3 F = P + pl \qquad \text{(IX)},$$

dalla quale: per sezione rettangolare di base b e di altezza h si ottiene:

$$K_3\, b\, h = P + pl \qquad \text{(X)},$$

e per sezione circolare di raggio r, si ha:

$$K_3 \pi r^2 = P + pl \qquad \text{(XI)}.$$

Esempio 1°. Si determini la lunghezza l di un prisma ad asse orizzontale, di sezione rettangolare, incastrato ad un'estremità, affinchè non si rompa sotto l'azione del proprio peso. Sia F l'area del rettangolo sezione, h la sua altezza, γ il peso dell'unità di volume.

Ponendo nella (VII) $P = o$, $p = F\gamma$ si ottiene:

$$\frac{1}{2}\,F\gamma l = \frac{1}{6}\,\frac{RFh}{l},$$

da cui:

$$l = \sqrt{\left\{\frac{Rh}{3\gamma}\right\}}.$$

Esempio 2°. Si determinino le dimensioni della sezione ABCD di un parallelepipedo vuoto in ferro ad asse orizzontale (*Fig.* 14), incastrato ad una estremità, caricato da un peso $P = 1600$ *Cg.* nell'altra estremità e da un peso $pl = 3200$ *Cg.* uniformemente distribuito nella sua lunghezza $l = 4^m$.

Si supponga l'altezza DB = 5 volte la base AB = x, si prenda lo spessore costante dell'anello rettangolare eguale ad $\frac{1}{10}$ della base AB.

L'equazione generale di stabilità è $Pl + \frac{1}{2}\, pl^2 = W$. Ora

$$Pl + \frac{1}{2}\, pl^2 = 1600.\, 4 + \frac{1}{2}\, 800.\, 4^2 = 12800.$$

$$W = \frac{RT}{\frac{1}{2}h} = \frac{6000000.\, 4\, x^4}{\frac{1}{2}5x} = 9600000\; x^3,$$

quindi:

$$12800 = 9600000\; x^3,$$

da cui

$$x = 0^m,\, 11,$$

perciò il rettangolo ABCD deve avere: la base AB = $0^m, 11$; l'altezza BD = 0, 55; ed al tubo devesi dare uno spessore $mn = 0^m, 011$.

§ 21. **Equazioni di stabilità per un solido prismatico ad asse orizzontale, sostenuto alle due estremità da appoggi posti sopra la stessa orizzontale, il quale è sollecitato da un peso applicato in un punto qualunque della sua lunghezza.** — Sia AB un prisma ad asse orizzontale (*Fig.* 15), appoggiato alle due estremità e sollecitato da un peso P applicato nel punto C. Siano:

A e B, le reazioni degli appoggi,

l, la lunghezza del prisma,

d, la distanza dell'estremità A dalla sezione CD.

Le reazioni degli appoggi vengono date dalle proporzioni A: P = $l - d : l$, B : P = $d : l$, dalle quali:

$$A = \frac{P\,(l - d)}{l} \qquad (1),$$

$$B = \frac{Pd}{l} \qquad (2),$$

Gli appoggi, senza alcuna alterazione di equilibrio, possono essere sostituiti dalle loro reazioni A, B; ed il prisma si potrà considerare come incastrato in CD, sollecitato nelle estremità da forze dirette verso l'alto, le quali tendono ad infletterlo.

Il massimo momento statico della forza estrinseca, che cimenta la porzione di prisma posta a sinistra di CD è

$$M_d = P \frac{d}{l} (l - d) \qquad (3).$$

Il massimo momento statico della forza estrinseca, che sollecita CDB, è

$$M_{l-d} = P \frac{d}{l} (l - d) \qquad (4).$$

Ora $M_d = M_{l-d}$, quindi la sezione più pericolosa è quella di applicazione del peso P.

Per la stabilità, rispetto all'inflessione, deve avere luogo l'eguaglianza $M = W$, quindi si ottiene:

$$P \frac{d}{l} (l - d) = W \qquad (I).$$

Ponendo per W il valore corrispondente alla forma della sezione, si avrà un'equazione, la quale servirà, o a trovare P quando siano note le dimensioni della sezione trasversale, o ad avere una delle dimensioni della sezione trasversale, quando sia noto P.

Quando P è applicato nella sezione di mezzo della trave, allora $M = \frac{1}{4} Pl$, l'equazione di stabilità sarà:

$$\frac{1}{4} Pl = W \qquad (II).$$

Per sezione rettangolare di area F e di altezza h si ha:

$$\left.\begin{aligned} P \frac{d}{l} (l - d) &= \frac{1}{6} RFh \\ \frac{1}{4} Pl &= \frac{1}{6} RFh \end{aligned}\right\} \qquad (III).$$

Per sezione circolare di area F e di altezza $h = 2r$ si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} P\frac{d}{l}(l-d) &= \frac{1}{8}\,RFh \\ \frac{1}{4}\,Pl &= \frac{1}{8}\,RFh \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV)}.$$

Esempio. Trovare le dimensioni di un parallelepipedo di larice appoggiato a due punti, posti sopra la stessa orizzontale alla distanza di 4^m, il quale debba sopportare nel mezzo un peso di 1000 chilogrammi.

Si prenda la base della sezione rettangolare eguale a $\frac{3}{4}$ dell'altezza.

Ponendo nella seconda delle (III), $P = 1000$, $R = 60$ chilogr. per c. m. q., $F = \frac{3}{4}\,x^2$, essendo x l'altezza h si avrà:

$$1000 = 7500x^3,$$

da cui

$$x = 0^m.24,$$

quindi la sezione rettangolare del parallelepipedo avrà l'altezza $h = 0,24$, la base $b = 0^m,18$.

§ 22. Equazione di stabilità per un corpo prismatico, il quale appoggia nelle estremità sopra sostegni posti nella stessa orizzontale, ed è sollecitato e da un peso uniformemente distribuito nella sua lunghezza e da un carico verticale applicato nella sezione di mezzo. — Sia il solido prismatico AB (*Fig.* 16) ad asse rettilineo, appoggiato alle due estremità A e B, e sollecitato dal peso pl uniformemente distribuito nella sua lunghezza l, e dal peso P applicato nella sezione di mezzo.

Le reazioni A e B eguali degli appoggi, sono date dall'equazione

$$A = B = \frac{1}{2}\,(P + pl).$$

Il massimo valore del momento inflettente M, si ha dal mo-

mento statico delle forze $\frac{1}{2}$ P + $\frac{1}{2}$ pl, $\frac{1}{2}$ pl rispetto alla sezione di mezzo, quindi:

$$M = \frac{1}{2}(P + pl)\frac{l}{2} - \frac{1}{2}pl.\frac{1}{4}l = \frac{1}{4}Pl + \frac{1}{8}pl^2 \text{ (I)},$$

e l'equazione di stabilità sarà:

$$\frac{1}{4}Pl + \frac{1}{8}pl^2 = W \qquad \text{(II)},$$

la quale per P = o, risulta:

$$\frac{1}{8}pl^2 = W \qquad \text{(III)}.$$

Per sezione rettangolare di base b e di altezza h si ha:

$$pl^2 = \frac{8}{6}RFh \quad \text{da cui: } pl = \frac{4}{3}\frac{RFh}{l} \qquad \text{(IV)}.$$

Per sezione circolare di raggio r:

$$\frac{1}{8}pl^2 = \frac{1}{4}R\pi r^3, \quad \text{da cui: } pl = 2R\frac{\pi r^3}{l} \qquad \text{(V)}.$$

Per sezione formata dei rettangoli ADEF, $adef$, posti a distanza h' l'uno dall'altro (*Fig.* 12), per le ipotesi stabilite nel § 19, si ha:

$$W = h'KF_1 = h'K_2F_2,$$

perciò:

$$\frac{1}{8}pl^2 = h'K_1F_1 = h'K_2F_2,$$

da cui:

$$pl = 8\frac{h'K_1F_1}{l} = 8\frac{h'K_2F_2}{l} \qquad \text{(VI)}.$$

Quando il prisma di sezione rettangolare di base b e di altezza h è soltanto sollecitato dal proprio peso, allora $p = bh\gamma$ esprimendo con γ il peso dell'unità di volume, e dalla (IV) risulta:

$$bh l \gamma = \frac{4}{3} \text{R} \frac{bh^2}{l},$$

da cui:

$$l = 2 \sqrt{\left\{ \text{R} \frac{h}{3\gamma} \right\}} \qquad \text{(VII)},$$

lunghezza che si può assegnare al prisma appoggiato alle due estremità, affinchè non si rompa sotto l'azione del proprio peso.

Esempio. Si trovi il peso, che può sopportare per ogni metro di lunghezza una trave in ferro a doppio T, lunga 6^m, appoggiata alle due estremità, la quale presenti le seguenti dimensioni: l'altezza $= 0,25$; la larghezza delle due tavole $= 0^m,10$; lo spessore delle tavole e del gambo $= 0^m,01$.

Dall'equazione generale di stabilità $\frac{1}{8} pl^2 = \frac{2\text{RT}}{h}$ risulta:

$$p = \frac{8}{l^2} \cdot \frac{2\text{RT}}{h} \qquad (1).$$

Ora: $l = 6^m$; $\text{R} = 6$ chilogr. per m. m. q.; $h = 0,25$; $\text{T} = 0,000\,56$; ponendo tali valori nella (1) si ottiene, che per ogni metro di lunghezza, la trave può sopportare un peso uniformemente distribuito di 600 chilogrammi.

§ 23. Equazione di stabilità per un prisma ad asse orizzontale incastrato alle due estremità e sollecitato da un peso nel mezzo. — Sia la trave AB (*Fig.* 17) incastrata nelle due estremità, sollecitata nel mezzo da una forza verticale P. La rottura del solido sotto l'azione di un peso applicato nel mezzo, si manifesta contemporaneamente nella sezione di mezzo e nelle sezioni d'incastro; quindi la forza P si può scomporre nelle tre componenti p, p e q; le due prime tendono a produrre la rottura nelle sezioni estreme, la terza in quella di mezzo.

Ora le parti CB, CA della trave si possono considerare incastrate ad una estremità e sollecitate nell'altra dalla forza p, quindi per sezione rettangolare di base b e di altezza h dalla (V) del § 20, risulta:

$$p = \frac{2}{6} R \frac{bh^2}{l} \quad (1).$$

Considerando AB come trave appoggiata all'estremità e sollecitata nel mezzo dalla forza q; dalla (II) del § 21 si ottiene per sezione rettangolare:

$$q = \frac{4}{6} R \frac{bh^2}{l} \quad (2).$$

La forza $P = p + p + q$ quindi l'equazione di stabilità sarà:

$$P = \frac{4}{6} R \frac{bh^2}{l} + \frac{4}{6} R \frac{bh^2}{l} = \frac{4}{3} R \frac{bh^2}{l}. \quad (I).$$

Paragonando la (I) con la (III) del § 21, si vede che a parità di dimensioni un prisma di sezione rettangolare, incastrato alle due estremità, può sopportare uno sforzo doppio di quello, che sopporterebbe nel caso, in cui egli fosse semplicemente appoggiato.

Esempio. Una trave di larice lunga 5^m, di sezione rettangolare, avente la base $b = 0^m, 15$, l'altezza $h = 0, 20$, è incastrata alle due estremità; si trovi il peso, che può sopportare nel mezzo.

Si pongano nella (I) per b, h ed l i loro valori, prendasi $R = 60$ chilogr. per c.m.q., si avrà:

$$P = 960 \text{ chilogrammi},$$

peso, che può esser applicato nel mezzo della trave incastrata senza alcun pericolo di rottura.

§ 24. **Equazione di stabilità per un prisma ad asse orizzontale appoggiato alle due estremità e caricato di 4 pesi eguali, due a due disposti simmetricamente rispetto alla sezione di mezzo, e di un peso uniformemente distribuito nella sua lunghezza.** — Sia la trave AB (*Fig.* 18) appoggiata alle due estremità A, B poste sopra la stessa orizzontale, e sollecitata da quattro pesi eguali a P, applicati nei punti C, D, E, F, disposti simmetrica-

mente rispetto al mezzo, e dal peso $2pl$ uniformemente distribuito nella lunghezza $2l$. Pongasi:

c la distanza BF = AC,

d la distanza AD = BE.

Le reazioni eguali degli appoggi sono date dall'equazione

$$A = B = 2P + pl \qquad (1).$$

Il massimo valore del momento inflettente M corrisponde al momento statico delle forze estrinseche rispetto alla sezione di di mezzo, quindi:

$$M = P\,(c + d) + \frac{1}{2}\,pl^2 \qquad (2).$$

L'equazione di stabilità sarà:

$$P\,(c + d) + \frac{1}{2}\,p\,l^2 = W \qquad (I),$$

nella quale il W deve essere sostituito dai valori corrispondenti alle diverse sezioni.

Esempio. Si trovi la resistenza, che sviluppa l'unità di area della sezione di una trave in ferro, sostenuta alle estremità da due appoggi, posti alla distanza di $7^m,10$ l'uno dall'altro, quando:

$P = 12380$ chilogr.; $p = 890$ chilogr.; $c = 1^m,05$; $d = 2^m,55$:

e la sezione trasversale ABHG (*Fig.* 18) presenta le seguenti dimensioni:

$AB = a = 0^m,280$; $AH = b = 1^m,124$; $Da + bC = a' = 0^m,112$;

$ma = b' = 1^m,100$; $de + fc = a'' = 0^m,136$; $eq = b'' = 1^m,076$;

$gi + lh = a''' = 0^m,024$; $sg = b''' = 0^m,940$.

Il massimo momento

$$M = 12380\,(1,05 + 2,55) + \frac{1}{2}\,890.\,\overline{3,55}^2 = 50175.$$

Il momento d'inerzia

$$I = \frac{1}{12}\,(ab^3 - a'b'^3 - a''b''^3 - a'''b'''^3) = 0,00\,502\,494\,7499.$$

La semi-altezza della trave ossia $\frac{1}{2}$ $h = 0^m{,}562$.

Dall'equazione generale di stabilità $M = W = \frac{2RT}{h}$ risulta:

$$R = \frac{Mh}{2T},$$

quindi ponendo per M, h e T i loro valori, si ottiene:

$$R = \frac{50175.\ 0{,}562}{0{,}00\,502\,494\,7499} = 5617201 \text{ chilogrammi},$$

quindi la trave deve sviluppare chilogr. 5, 62 per ogni m. m. q. della sezione trasversale.

Osservazione. La condizione di stabilità $K_3\,\Omega = P$ non venne considerata nei precedenti problemi, perchè dà risultati minori di quelli, che si ottengono dall'equazione $M = W$.

§ 25. **Solidi di egual resistenza alla flessione.** — Diconsi solidi di eguale resistenza alla flessione, quelli che presentano eguale pericolo di rottura in tutte le sezioni.

I. *Determinare il profilo longitudinale di un solido di eguale resistenza, incastrato ad una estremità e sollecitato nell'altra da una forza parallela alla sezione d'incastro.*

1° *Caso particolare.* Le sezioni del prisma sieno rettangolari, di base costante b e di altezza variabile y (*Fig.* 19). Poniamo:

h l'altezza della sezione d'incastro AB,

l la lunghezza del prisma,

y l'altezza variabile di una sezione posta a distanza x dall'estremo C.

La relazione che lega le dimensioni della sezione AB colla forza P rispetto all'inflessione, è:

$$P = \frac{1}{6} R \frac{bh^2}{l} \qquad (1).$$

La sezione rettangolare di base b, di altezza y posta a distanza x dall'estremo C, può sopportare lo sforzo:

$$P_1 = \frac{1}{6} R \frac{by^2}{x} \qquad (2).$$

In un solido di eguale resistenza devono i valori (1) e (2) essere eguali, perciò:

$$\frac{1}{6} R \frac{bh^2}{l} = \frac{1}{6} Rb \frac{y^2}{x},$$

da cui:

$$y^2 = \frac{h^2}{l} x \qquad \text{(I)},$$

quindi le altezze delle sezioni del prisma sono date dalle ordinate di una parabola avente il vertice C.

Rispetto allo scorrimento trasversale, tutte le sezioni presentano eguale pericolo di rottura, essendo tutte sollecitate dalla forza P, trascurando il peso della trave, quindi la loro sezione costante sarà data dall'equazione $K_3 b y_1 = P$, da cui

$$y_1 = \frac{P}{K_3 b} \qquad \text{(II)}.$$

Condotta LG parallelamente ad AC alla distanza $AL = y_1$; si vede che il solido deve presentare la forma ACGDB, per esser di eguale resistenza.

2° *Caso particolare*. La sezione della trave incastrata sia un doppio T, la sua parete sia a traliccio. Le aree delle sezioni delle tavole sieno costanti in tutta la lunghezza della trave, (*Fig.* 20).

Poniamo: la lunghezza $AB = l$; l'altezza $AC = h$; l'altezza del gambo $ac = h'$; y ed y' le altezze EF ed *ef* della sezione posta a distanza x dall'estremo C,

z la distanza dei centri di gravità delle due aree E*e*, *f*F,

F_1 l'area costante delle sezioni della tavola superiore,

F_2 l'area costante delle sezioni della tavola inferiore.

Quando gli spessori A*a*, E*e*, C*c*, F*f* sono piccolissimi a fronte di *ac*, *ef*, allora il momento di resistenza per la sezione d'incastro risulta:

$$W = h'K_1F_1 = h'K_2F_2.$$

Il momento statico della forza P rispetto a tale sezione è $M = Pl$, quindi:

$$Pl = h'K_1F_1 = h' K_2 F_2 \qquad (3).$$

Analogamente per la sezione E F si ha:

$$Px = y'K_1F_1 = y'K_2F_2 \qquad (4).$$

Il valore di P dato dalla (3) deve eguagliare quello dato dalla (4), quindi:

$$\frac{h'}{l} K_1 F_1 = \frac{y'}{x} K_1 F_1,$$

da cui:

$$y' = \frac{h'}{l} x \qquad (III);$$

le altezze dunque dei gambi delle diverse sezioni devono variare, come le ordinate della retta data dalla (III).

I valori delle aree F_1, F_2, devono pure soddisfare alla,

$$(F_1 + F_2) K_3 = P \qquad (IV),$$

equazione di stabilità rispetto allo scorrimento trasversale.

II. *Determinare il profilo longitudinale del solido di eguale resistenza, incastrato alla sua estremità e sollecitato da un peso uniformemente distribuito sopra la sua faccia superiore orizzontale.*

1° *Caso particolare.* Le sezioni del solido siano rettangolari, di base costante b, e di altezza variabile y (*Fig.* 21). Poniamo h l'altezza AB della sezione d'incastro, l la lunghezza AC. Rispetto alla sezione AB, dalla (VI) del § 20 risulta:

$$pl^2 = \frac{1}{3} Rbh^2 \qquad (5),$$

rispetto alla sezione EF, si avrà analogamente

$$px^2 = \frac{1}{3} Rby^2 \qquad (6).$$

Affinchè il solido ACB sia di eguale resistenza, rispetto all'inflessione deve avere luogo l'eguaglianza

$$\frac{1}{3}\ \mathrm{R}b\ \frac{h^2}{l^2} = \frac{1}{3}\ \mathrm{R}b\ \frac{y^2}{x^2},$$

da cui:

$$y = x\ \frac{h}{l} \qquad \text{(V)},$$

quindi le altezze y delle sezioni del solido variano come le ordinate della retta data dalla (V), la quale passa per C e sega AD nel punto B posto a distanza h da A.

Rispetto allo scorrimento trasversale, devono avere luogo le equazioni:

$$\mathrm{K}_3 by = px \qquad (7),$$

$$\mathrm{K}_3 bh = pl \qquad (8),$$

dalle quali risulta:

$$y = \frac{h}{l}\ x \qquad \text{(VI)},$$

equazione analoga alla (V).

2° *Caso particolare*. Le sezioni del solido a parete reticolata siano a doppio T, allora dalla (VI) del § 20, rispetto alla sezione d'incastro risulta (*Fig*. 22):

$$\frac{1}{2}\ pl^2 = h'\mathrm{K}_1\mathrm{F}_1 = h'\mathrm{K}_2\mathrm{F}_2 \qquad (9).$$

rispetto alla sezione posta a distanza x dall'estremo C, analogamente si ottiene:

$$\frac{1}{2}\ px^2 = y'\mathrm{K}_1\mathrm{F}_1 = y'\mathrm{K}_2\mathrm{F}_2 \qquad (10).$$

Dovendo il solido essere di eguale resistenza, risulta:

$$\frac{y'}{x^2} = \frac{h'}{l^2},$$

da cui:

$$y' = \frac{h'}{l^2}\ x^2 \qquad \text{(VII)},$$

quindi le altezze delle sezioni variano come le ordinate di una parabola concava verso il basso.

Le aree F_1 F_2 sono date dalle equazioni

$$F_1 = \frac{pl^2}{2K_1 h'}, \quad F_2 = \frac{pl^2}{2K_2 h'},$$

i quali valori devono soddisfare all'equazione

$$(F_1 + F_2)\, \dot{K_3} = pl,$$

supponendo le aree F_1, F_2 costanti per tutta la lunghezza del solido.

III. *Determinare il profilo longitudinale di un solido avente la faccia inferiore orizzontale, il quale, appoggiato alle due estremità, si trova sotto l'azione di una forza P, applicata in un punto qualunque della sua lunghezza.* — Le sue sezioni siano rettangolari di base costante b (*Fig.* 23). Poniamo:

l la lunghezza AB del solido,

d la distanza del punto di applicazione di P dall'estremo A,

h l'altezza CD, y l'altezza cd della sezione posta a distanza x da A.

Per la sezione CD si ha dalla (III) del § 21

$$P = \frac{1}{6} R \frac{lb}{l-d} \frac{h^2}{d} \qquad (11),$$

analogamente per la sezione $c\ d$ risulta:

$$P = \frac{1}{6} R \frac{lb}{l-d} \frac{y^2}{x} \qquad (12),$$

dalle quali risulta:

$$y^2 = \frac{h^2}{d} x \qquad (VIII),$$

ossia le altezze delle sezioni di ACD variano, come le ordinate della parabola AdD data dalla (VIII).

Le altezze delle sezioni poste alla destra di CD sono date dalle ordinate della parabola

$$y^2 = \frac{h^2}{l - d}\, x \qquad \text{(IX)}.$$

Quando il peso P si trasporta nel mezzo, allora le linee AdD, DB diventano archi della parabola

$$y^2 = \frac{2h^2}{l}\, x \qquad \text{(X)}.$$

Nella parte AC le sezioni presentano eguale pericolo di rottura rispetto allo scorrimento trasversale, sotto l'azione della reazione A, quindi l'altezza costante dei rettangoli sezioni vien data da

$$y' = \frac{A}{K_3\, b} \qquad \text{(XI)},$$

e l'altezza costante delle sezioni poste alla destra di CD risulta da

$$y'' = \frac{B}{K_3 b} \qquad \text{(XII)}.$$

Condotte le rette EF, HG parallele ad AB, l'una alla distanza y', l'altra alla distanza y'' da AB, il solido di eguale resistenza presenterà la forma indicata dalla fig. 23.

IV. *Determinare il profilo longitudinale del solido* AB *appoggiato alle due estremità, e caricato di un peso uniformemente distribuito nella sua lunghezza.*

1° *Caso particolare*. Le sezioni sieno rettangolari di base costante b e di altezza variabile y (*Fig.* 24). La sua faccia inferiore sia orizzontale. Esprimendo con l la lunghezza AB, con h l'altezza della sezione di mezzo, il momento statico M rispetto alla sezione di mezzo è $\frac{1}{8}\ pl^2$, quindi per la stabilità si avrà:

$$\frac{1}{8}\ pl^2 = \frac{1}{6}\ \mathrm{R}bh^2 \qquad (13).$$

Il valore di M per una sezione posta a distanza x da un

estremo è: $M_x = \frac{1}{2} p (lx - x^2)$, il momento di resistenza della sezione rettangolare di base b e di altezza y è $W = \frac{1}{6} Rby^2$; per la stabilità

$$\frac{1}{2} p (lx - x^2) = \frac{1}{6} Rby^2,$$

da cui:

$$y^2 = 3 \frac{1}{R} \frac{p}{b} (lx - x^2) \qquad (14),$$

ma dalla (13) si ha:

$$\frac{p}{Rb} = \frac{4h^2}{3l^2},$$

quindi:

$$y^2 = 4 \frac{h^2}{l^2} (lx - x^2) \qquad (XIII),$$

dalla quale si vede, che le altezze delle diverse sezioni varieranno come le ordinate dell'ellisse, avente l'asse maggiore $AB = l$, ed il semi-asse $CD = h$.

Rispetto allo sforzo di scorrimento trasversale, le sezioni sopra gli appoggi avranno l'altezza

$$h' = \frac{pl}{2K_3 b} \qquad (15),$$

la sezione posta a distanza x dall'estremo avrà l'altezza

$$y' = \frac{\frac{1}{2} pl - px}{K_3 b} \qquad (16).$$

Dovendo il solido essere di eguale resistenza, dalle (15) e (16) si avrà:

$$y' = h' - \frac{2h'}{l} x \qquad (XIV),$$

ossia le altezze delle sezioni, rispetto allo scorrimento trasver-

sale, varierebbero come le ordinate della spezzata ECF, essendo $AE = BF = \frac{1}{2}\ pl$.

Il profilo longitudinale del solido avrà dunque la forma indicata dalla fig. 24.

2° *Caso particolare*. Le sezioni del solido a parete reticolata siano a doppio T (*Fig.* 25), la sua faccia inferiore sia orizzontale, le aree F_1, F_2 delle sezioni delle tavole siano costanti in tutta la lunghezza della trave. Il momento statico M rispetto alla sezione di mezzo è $M = \frac{1}{8}\ pl^2$; il momento di resistenza della sezione a doppio T è $W = h'K_1F_1 = h'K_2F_2$, quindi:

$$\frac{1}{8}\ pl^2 = h'K_1F_1 = h'K_2F_2,$$

da cui:

$$F_1 = \frac{pl^2}{8K_1h'} \qquad (17),$$

$$F_2 = \frac{pl^2}{8K_2h'} \qquad (18),$$

$$pl = \frac{8h'}{l}\ K_1F_1 = \frac{8h'}{l}\ K_2F_2 \qquad (19).$$

Per la sezione EF posta a distanza x dall'estremo A, ponendo $y' = ef$, si avrà:

$$\frac{1}{2}\ p(lx - x^2) = y'K_1F_1 = y'K_2F_2,$$

da cui:

$$y' = \frac{p}{2K_1F_1}\ (lx - x^2) \qquad (20),$$

dalla (19) si ha

$$\frac{p}{2K_1F_1} = \frac{4h'}{l^2},$$

quindi:

$$y' = 4h' \left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \qquad \text{(XV)},$$

dalla quale si potrà avere il valore dell'altezza del gambo della sezione posta a distanza x dall'estremo A.

Praticamente si dà alle sezioni di appoggio un'altezza variabile da $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$ di $h = \text{CD}$, affinchè non si rompa per scorrimento trasversale. In questo caso la linea limite ADB si cambia nell'arco di circolo aDb, avente la corda $ab = l$, la saetta $cd = h' - \frac{1}{3} h'$.

Articolo II. — Delle linee elastiche.

§ 26. **Equazione della linea, secondo la quale si dispone l'asse rettilineo orizzontale di un prisma, incastrato ad una estremità e sollecitato nell'altra da uno sforzo verticale, e nella sua lunghezza da un peso uniformemente distribuito.**

Le forze applicate nel prisma essendo verticali e dirette al basso, la linea elastica sarà contenuta in un piano verticale, e sarà concava verso il basso (*Fig.* 26). Si riferisca tale linea a due assi, uno BT orizzontale, l'altro BC verticale.

Siano:

x, y le coordinate di un punto D,

JD, KF, AM le tangenti nei punti D, F, A,

α_1, α_2 gli archi di raggio 1, che misurano gli angoli DJC, FKC,

l la lunghezza AC,

f la massima ordinata BC,

C la tangente trigonometrica dell'angolo MAC,

ρ raggio di curvatura.

Per la leggiera inflessione del prisma, l'arco AD poco differisce dalla sua proiezione orizzontale AE, e senza sensibile errore si può considerare $\text{AD} = \text{AE} = x$.

Nel § 8 si è trovato il momento di resistenza $\text{W} = \frac{\text{ET}}{\rho}$.

Il momento inflettente rispetto alla sezione posta a distanza x

dall'estremo A è $M = Px + \frac{1}{2} px^2$, l'equazione di stabilità sarà:

$$Px + \frac{1}{2} px^2 = \frac{ET}{\rho},$$

da cui:

$$\rho = ET \frac{1}{Px + \frac{1}{2} px^2} \qquad (I).$$

Posto il piccolissimo arco $DF = s$, si ottiene:

$$\rho = \pm \frac{s}{\alpha_1 - \alpha_2} \qquad \text{(Nota III).}$$

Ora, senza sensibile errore, si può prendere $s = \delta = DH$; e le lunghezze degli archi α_1, α_2 possono considerarsi eguali alle loro tangenti trigonometriche, ossia si può porre: $\alpha_1 = \text{tang.}\ \alpha_1$, $\alpha_2 = \text{tang.}\ \alpha_2$, $\rho = \pm \frac{\delta}{\text{tang.}\ \alpha_1 - \text{tang.}\ \alpha_2}$; sostituendo in (I) per ρ il suo valore risulta:

$$\text{tang.}\ \alpha_1 - \text{tang.}\ \alpha_2 = \frac{\delta}{ET}\left[Px + \frac{1}{2} px^2 \right] \qquad (II).$$

Se dividesi la linea $AE = x$ in un numero n di parti eguali $a\delta$, essendo δ una quantità piccolissima, allora le ascisse dei punti $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n$ saranno $1\delta, 2\delta, 3\delta, \ldots n\delta$. Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ gli archi di raggio 1, che misurano gli angoli delle tangenti nei punti $b_1, b_2, \ldots b_n$ coll'orizzontale.

Ponendo per x successivamente i valori $1\delta, 2\delta, \ldots n\delta$ nella (II), si avranno le seguenti equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
C - \text{tang.}\ \alpha_1 &= \frac{\delta}{ET}\left[P.\ 1\delta + \frac{1}{2}\ p(1\delta)^2 \right] \\
\text{tang.}\ \alpha_1 - \text{tang.}\ \alpha_2 &= \frac{\delta}{ET}\left[P.\ 2\delta + \frac{1}{2}\ p(2\delta)^2 \right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\text{tang.}\ \alpha_{n-1} - \text{tang.}\ \alpha_n &= \frac{\delta}{ET}\left[P.\ n\delta + \frac{1}{2}\ p(n\delta)^2 \right]
\end{aligned}\right\} \qquad (III).$$

dalle quali si avrà:

$$C - \text{tang.}\, \alpha_n = \frac{1}{ET}\left[\frac{(n\delta)^2}{2}P + \frac{1}{2}\, p\, \frac{(n\delta)^3}{3}\right] =$$

$$= \frac{1}{ET}\left[\frac{1}{2}Px^2 + \frac{1}{6}\, px^3\right] \qquad \text{(IV)}.$$

Ora per $x = l$, α_n angolo della tangente BT coll'orizzontale si riduce a zero, perciò:

$$C = \frac{1}{ET}\left[\frac{1}{2}\, Pl^2 + \frac{1}{6}\, pl^3\right].$$

Sostituendo tale valore nella (IV), si ottiene:

$$\text{tang.}\, \alpha = \frac{1}{ET}\left[\frac{1}{2}\, Pl^2 + \frac{1}{6}\, pl^3 - \frac{1}{2}\, Px^2 - \frac{1}{6}\, px^3\right] \qquad \text{(V)}.$$

Ora nel triangolo rettangolo FDH si ha: tang. FDH $=$ tang. $\alpha =$ $= \frac{(FH)}{(DH)} = \frac{(FH)}{\delta}$, ponendo tale valore nella (V), si ottiene:

$$(FH) = \frac{\delta}{ET}\left\{\frac{1}{2}\, Pl^2 + \frac{1}{6}\, pl^3 - \frac{1}{2}\, Px^2 - \frac{1}{6}\, px^3\right\} \qquad \text{(VI)}.$$

Ora (FH) è la differenza di due ordinate successive DE, FG.

Essendo a_1b_1, b_2h_2, h_3b_3 . . . h_nD le differenze successive delle ordinate a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, . . . dei punti aventi successivamente 1δ, 2δ . . . $n\delta$ per ascisse, si avranno le seguenti equazioni:

$$a_1b_1 = \frac{\delta}{ET}\left[\frac{1}{2}\, Pl^2 + \frac{1}{6}\, pl^3 - \frac{1}{2}\, P(1\delta)^2 - \frac{1}{6}\, p(1\delta)^3\right]$$

$$h_2b_2 = \frac{\delta}{ET}\left[\frac{1}{2}\, Pl^2 + \frac{1}{6}\, pl^3 - \frac{1}{2}\, P(2\delta)^2 - \frac{1}{6}\, p(2\delta)^3\right]$$

. . . .

$$h_n D = \frac{\delta}{ET}\left[\frac{1}{2}\, Pl^2 + \frac{1}{6}\, pl^3 - \frac{1}{2}\, P(n\delta)^2 - \frac{1}{6}\, p(n\delta)^3\right].$$

Ora

$$a_1 b_1 + h_2 b_2 + \dots + h_n \mathrm{D} = \mathrm{ED} = y,$$

quindi:

$$y = \frac{1}{\mathrm{ET}} \left\{ \frac{1}{2} \mathrm{P} l^2 x + \frac{1}{6} p l^3 x - \frac{1}{6} \mathrm{P} x^3 - \frac{1}{24} p x^4 \right]$$

$$y = \frac{\mathrm{P} x}{2\mathrm{ET}} \left\{ l^2 - \frac{1}{3} x^2 \right\} + \frac{p x}{6\mathrm{ET}} \left\{ l^3 - \frac{1}{4} x^3 \right\} \qquad \text{(VII).}$$

Per $x = l$ la saetta:

$$f = \frac{\mathrm{P} l^3}{3\mathrm{ET}} + \frac{p l^4}{8\mathrm{ET}} \qquad \text{(VIII).}$$

Il raggio di curvatura

$$\rho = \frac{2\mathrm{ET}}{x(2\mathrm{P} + p x)} \qquad \text{(IX).}$$

Per $x = 0$, $\rho = \infty$, quindi nel punto estremo A la linea non è incurvata.

Il valore di ρ è inversamente proporzionale ad x, il suo minimo valore corrisponde alla sezione avente l'ascissa $x = l$, quindi in B la linea elastica presenta la massima curvatura.

Per $p = 0$, si ha:

$$y = \frac{\mathrm{P} x}{2\mathrm{ET}} \left\{ l^2 - \frac{1}{3} x^2 \right\} \qquad \text{(VII)}_a,$$

$$f = \frac{\mathrm{P} l^3}{3\mathrm{ET}} \qquad \text{(VIII)}_a,$$

$$\rho = \frac{\mathrm{ET}}{\mathrm{P} x} \qquad \text{(IX)} .$$

Per $\mathrm{P} = 0$, si ottiene:

$$y = \frac{p x}{6\mathrm{ET}} (l^3 - \frac{1}{4} x^3) \qquad \text{(VII)}_b,$$

$$f = \frac{pl^4}{8ET} \qquad \text{(VIII)}_b,$$

$$\rho = \frac{2ET}{px^2} \qquad \text{(IX)}_b.$$

Esempio. Una spranga orizzontale in ferro di sezione circolare lunga 3^m sia incastrata ad un'estremità e sollecitata nell'altra da un peso $P = 200$ chilogr., ed in ogni unità di lunghezza da un carico $p = 100$ chilogr. Si domanda:

1° Il raggio della sezione trasversale;

2° L'equazione della linea elastica;

3° L'abbassamento del punto di applicazione della forza P.

Nel § 20 si è trovato l'equazione di stabilità

$$Pl + \frac{1}{2} pl^2 = W = \frac{1}{8} R\pi r^2 . 2r,$$

essendo l la lunghezza della trave, ed r il raggio della sezione trasversale.

Ponendo per P, p, l, R, π i loro valori, si avrà:

$$105 = 471180,$$

da cui

$$r = 0^m,06.$$

dunque il raggio della sezione trasversale è di $0^m,06$.

Ora il momento d'inerzia per la sezione circolare è:

$$T = \frac{1}{4} \pi r^4 = \frac{1}{4} \pi (0,06)^4 = 0,0000101736.$$

Essendo per il ferro il modulo di elasticità $E = 2\,000\,000$ per c. m. q., si avrà:

$$TE = 203472.$$

Ponendo nella (VIII) per P, p, l, TE i loro valori, si avrà: l'equazione della linea elastica:

$$0,204\, x^3 + 1,6\, x^2 - 43,2\, x - 22 = 10000\, y.$$

L'abbassamento del punto di applicazione di P, ossia il valore di f è dato dalla (VIII).

Ponendo per P, p, l, TE i loro valori, si avrà:

$$f = 0{,}0088 + 0{,}0049.$$

L'estremità della spranga si abbassa di $8^{mm},8$, se agisce soltanto il peso P; di $4^{mm},9$, se la trave si trova soltanto sotto l'azione del peso uniformemente distribuito; di $13^{mm},7$, se la trave è contemporaneamente sollecitata e dal peso P e dal peso pl uniformemente distribuito.

§ 27. Equazione della linea, secondo la quale si dispone l'asse orizzontale rettilineo d'un prisma, il quale appoggiato alle due estremità viene sollecitato da un peso uniformemente distribuito nella sua lunghezza e da un peso applicato in un punto qualunque. — Sia la trave AB appoggiata alle due estremità (*Fig.* 27). Siano: d e d' le distanze del punto C di applicazione di P dagli estremi A e B.

x e y le coordinate AE e EF,

x' e y' le coordinate BG e GH,

β, α_1 e α_2 gli archi di raggio 1, che misurano gli angoli CSA, FHA e HSB,

ρ, ρ' i raggi di curvatura dei punti F ed H,

l la lunghezza della linea AB,

p il peso distribuito nell'unità di lunghezza.

Le reazioni degli appoggi A e B sono date dalle seguenti equazioni:

$$A = \frac{Pd'}{l} + \frac{1}{2}\,pl \qquad (1),$$

$$B = \frac{Pd}{l} + \frac{1}{2}\,pl \qquad (2).$$

Il valore del momento statico delle forze estrinseche rispetto alla sezione F è:

$$M = Ax - \frac{1}{2}\,px^2,$$

quindi l'equazione della linea elastica verrà data dall'eguaglianza

$$\frac{ET}{\rho} = Ax - \frac{1}{2}\,px^2 \qquad (I).$$

Ponendo $\rho = \frac{s}{\alpha_1 - \alpha_2}$, ed operando analogamente al modo seguito nel § precedente, si ottiene:

$$C - \text{tang.}\, \alpha_1 = \frac{1}{ET}\left(\frac{1}{2}Ax^2 - \frac{1}{6}px^3\right) \qquad (3);$$

ora per $x = d$, $\alpha_1 = \beta$; quindi si ha:

$$ETC = \frac{1}{2}Ad^2 - \frac{1}{6}pd^3 + ET\,\text{tang.}\,\beta \qquad (4).$$

Ponendo nella (3) il valore di ETC dato dalla (4) si ottiene:

$$ET\,\text{tang.}\,\alpha_1 = \frac{1}{2}Ad^2 - \frac{1}{6}pd^3 - \frac{1}{2}Ax^2 + \frac{1}{6}px^3 +$$

$$+ ET\,\text{tang.}\,\beta \qquad (II).$$

Per i punti F, N molto vicini della linea elastica, si conducano le ordinate FE, MN; si tiri $Fo = \delta$ parallelamente ad AB, si avrà: tang. $\alpha_1 = \frac{No}{\delta}$; ponendo tale valore nella (II), si ha:

$$No = \frac{\delta}{ET}\left\{\frac{1}{2}Ad^2 - \frac{1}{6}pd^3 - \frac{1}{2}Ax^2 + \frac{1}{6}px^3 + ET\,\text{tang.}\,\beta\right\} \qquad (III).$$

Dividasi l'ascissa x in un numero n grandissimo di parti eguali a δ. Per i punti di divisione si tirino le ordinate corrispondenti alle ascisse 1δ, 2δ, 3δ, 4δ . . . $n\delta$. Siano z_1, z_2, z_3 . . . z_n le differenze delle successive ordinate. Ponendo nella (III) successivamente per x i valori 1δ, 2δ, 3δ . . . $n\delta$ si avranno le seguenti equazioni:

$$z_1 = \frac{\delta}{ET}\left\{\frac{1}{2}Ad^2 - \frac{1}{6}pd^3 - \frac{1}{2}A(1\delta)^2 + \frac{1}{6}p(2\delta)^3 + ET\,\text{tang.}\,\beta\right\}$$

$$z_2 = \frac{\delta}{ET}\left\{\frac{1}{2}Ad^2 - \frac{1}{6}pd^3 - \frac{1}{2}A(2\delta)^2 + \frac{1}{6}p(2\delta)^3 + ET\,\text{tang.}\,\beta\right\}$$

. . . .

$$z_n = \frac{\delta}{\mathrm{ET}} \left\{ \frac{1}{2} \mathrm{A}d^2 - \frac{1}{6} pd^3 - \frac{1}{2} \mathrm{A}(n\delta)^2 + \frac{1}{6} p(n\delta)^3 + \mathrm{ET}\ \mathrm{tang.}\ \beta \right\}.$$

Ora $z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n = y$, quindi:

$$y = \frac{1}{\mathrm{ET}} \left\{ \frac{1}{2} \mathrm{A}d^2x - \frac{1}{6} pd^3 = x - \frac{1}{6} \mathrm{A}x^3 + \frac{1}{24} px^4 + x\mathrm{ET}\ \mathrm{tang.}\,\beta \right\} \quad \text{(IV)}.$$

Per la parte CB del prisma posta alla destra del punto di applicazione di P, si hanno le seguenti equazioni:

$$\mathrm{ET}\ \mathrm{tang.}\ \alpha_2 = \frac{1}{2} \mathrm{B}d'^2 - \frac{1}{6} pd'^3 - \frac{1}{2} \mathrm{B}x'^2 + \frac{1}{6} px'^3 - \mathrm{ET}\ \mathrm{tang.}\,\beta \quad \text{(V)},$$

$$y' = \frac{1}{\mathrm{ET}} \left\{ \frac{1}{2} \mathrm{B}d'^2x' - \frac{1}{6} pd'^3x' - \frac{1}{6} \mathrm{B}x'^3 + \frac{1}{24} px'^4 - x'\mathrm{ET}\ \mathrm{tang.}\,\beta \right\} \quad \text{(VI)}.$$

Ponendo nella (IV), $x = d$, e nella (VI) $x' = d'$ dovendo esser $y = y' = f$, si avrà l'eguaglianza:

$$\frac{1}{3} \mathrm{A}d^3 - \frac{1}{8} pd^4 + d\mathrm{ET}\ \mathrm{tang.}\,\beta = \frac{1}{3} \mathrm{B}d'^3 - \frac{1}{8} p'd'^4 - d'\mathrm{ET}\ \mathrm{tang.}\,\beta,$$

da cui:

$$\mathrm{tang.}\ \beta = \frac{1}{24\mathrm{ET}l} \left\{ 8(\mathrm{B}d'^3 - \mathrm{A}d^3) - 3(pd'^4 - pd^4) \right\} \quad \text{(VII)}.$$

Ponendo $x = d$ nella (IV), $x' = d'$ nella (VI), si avranno le seguenti eguaglianze:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tang.}\,\beta &= \frac{f}{d} - \frac{1}{\mathrm{ET}} \left\{ \frac{1}{3} \mathrm{A}d^3 - \frac{1}{8} pd^4 \right\} \\ \mathrm{tang.}\,\beta &= \frac{1}{\mathrm{ET}} \left\{ \frac{1}{3} \mathrm{B}d'^3 - \frac{1}{8} pd'^4 \right\} - \frac{f}{d'} \end{aligned}\right\} \quad \text{(VIII)}.$$

Sostituendo per A e B i loro valori e ponendo $d + d' = l$, si avrà:

$$f = \frac{dd'}{24\mathrm{ET}l}\left\{8\mathrm{P}dd' + 4pl\,(d^2 + d'^2) - 3p\,(d^3 + d'^3)\right\} \qquad \text{(IX)}.$$

I raggi di curvatura nei punti F, H hanno i valori

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \frac{\mathrm{ET}}{x\left(\mathrm{A} - \frac{1}{2}\,px\right)} \\ \rho' &= \frac{\mathrm{ET}}{x'\left(\mathrm{A} - \frac{1}{2}\,px'\right)} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(X)}.$$

Per $x = 0$, $\rho = \rho' = \infty$; dunque nei punti A, B l'elemento di linea è rettilineo.

I valori di ρ, ρ' sono inversamente proporzionali a quelli di x, x'; quindi nel punto di applicazione di P il raggio di curvatura ha il minimo valore, e la linea presenta la massima curvatura.

§ 28. **Caso particolare.** — Quando il peso P è applicato nel punto di mezzo, allora $d = d' = \frac{1}{2}\,l$, tang. $\beta = 0$.

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} = \frac{1}{2}(\mathrm{P} + pl) \qquad \text{(I)},$$

$$\mathrm{ET}\ \text{tang.}\ \alpha = \frac{1}{16}\,(\mathrm{P} + pl)\,l^2 - \frac{1}{4}\,(\mathrm{P} + pl)\,x^2 - \frac{1}{6}\,p\left(\frac{1}{8}\,l^3 - x^3\right) \qquad \text{(II)},$$

$$y = \frac{1}{\mathrm{ET}}\left[\frac{1}{16}(\mathrm{P} + pl)\,l^2 x - \frac{1}{12}(\mathrm{P} + pl)\,x^3 - \frac{1}{24}\,p\left(\frac{1}{2}\,l^3 x - x^4\right)\right] \qquad \text{(III)},$$

$$f = \frac{1}{384}\,\frac{l^3}{\mathrm{ET}}\left[\,8\mathrm{P} + 5pl\,\right] \qquad \text{(IV)},$$

$$\rho = \frac{2\mathrm{ET}}{x\,[\mathrm{P} + p(l - x)]} \qquad \text{(V)}.$$

Il più piccolo valore di ρ corrisponde al punto di mezzo della trave; dove la linea presenta la massima curvatura, e la trave il massimo pericolo di rottura.

Se la trave si trova soltanto sotto l'azione della forza P, si ponga nelle precedenti eguaglianze $p = o$, si otterà:

$$y = \frac{1}{ET}\left[\frac{1}{4}Px\left(\frac{1}{4}l^2 - \frac{1}{3}x^2\right)\right] \qquad \text{VI)},$$

$$f = \frac{Pl^3}{48ET} \qquad \text{(VII)},$$

$$\rho = \frac{2ET}{Px} \qquad \text{(VIII)}.$$

Le eguaglianze (III), (IV), (V) per $P = o$ si riducono alle seguenti:

$$y = \frac{px}{24ET}\left\{l^3 - 2lx^2 + x^3\right\} \qquad \text{(IX)}.$$

$$f = \frac{5pl^4}{384ET} \qquad \text{(X)}.$$

$$\rho = \frac{2ET}{px(l-x)} \qquad \text{(XI)}.$$

Esempio I°. Trovare l'equazione della linea elastica di una trave in ferro lunga 6^m, appoggiata alle due estremità e caricata di un peso di 600 chilogr. per ogni metro di lunghezza. La sua sezione a doppio T abbia le seguenti dimensioni: altezza $h = 0^m,25$, la larghezza delle tavole $= 0^m,10$, lo spessore delle tavole e del gambo $= 0^m,01$.

Ora nel § 22 si è trovato il momento d'inerzia rispetto ad un asse orizzontale passante per il suo centro di gravità, ossia $T = 0,000056$. La trave essendo in ferro, il prodotto $ET = 1120\,000$.

Ponendo nella (IX), $l = 6^m$, $p = 600$ chilogr., si avrà l'equazione della linea elastica:

$$y = 0,0048x - 0,00026x^3 + 0,000023x^4.$$

Ponendo in questa equazione $x = 3$; oppure sostituendo nella (X) per p, l, E, T i loro valori, si avrà:

$$= f\, 0^m,009.$$

Esempio 2°. Trovare la saetta della linea secondo la quale si dispone un parallelepipedo di larice, lungo 4^m, appoggiato alle due estremità e caricato di un peso $P = 1000$ chilogr. nella sezione di mezzo. La sua sezione trasversale rettangolare abbia la base $b = 0^m,18$, l'altezza $h = 0^m,24$ (§ 21).

Il momento d'inerzia

$$T = \frac{1}{12} \cdot 0,18 \,.\, \overline{0,24}^3 = 0,000\,207\,36,$$

la trave essendo di larice il prodotto $ET = 248832$.

Ponendo nella (VII) $P = 1000$, $l = 4^m$, si avrà:

$$f = \frac{64000}{11943936} = 0^m,0053.$$

§ 29. **Equazione della linea, secondo la quale si dispone l'asse rettilineo di un prisma, incastrato alle due estremità e sollecitato da un peso P applicato in un punto qualunque.** — Per essere la trave incastrata, le tangenti in A ed in B (*Fig.* 28) saranno orizzontali, quindi in un estremo, p. es. in B, la trave si potrà supporre appoggiata, quando sia nel prolungamento BS sollecitata da una forza verticale q, la quale abbia tale intensità da rendere orizzontale l'elemento di linea in B. L'appoggio in B può essere sostituito dalla sua reazione B diretta verso l'alto, quindi la trave AB si può considerare come una leva che ha il suo fulcro in A ed è sollecitata dalle forze verticali B, P, q; le due ultime sono negative se la prima è positiva. Siano:

d, d' le distanze di C dalle estremità A, B.

f, y ed y' le ordinate dei punti C, G, F che hanno d, x ed x' per ascisse.

α, α', β gli archi di raggio 1, che misurano gli angoli delle tangenti nei punti G, F, C coll'orizzontale.

l ed a le lunghezze delle linee AB, AS.

Il momento statico delle forze estrinseche rispetto alla sezione G è:

$$M = B\,(l - x) - P(d - x) - q\,(a - x).$$

Per la stabilità deve M eguagliare $W = \frac{ET}{\rho}$, perciò:

$$ET = \rho \left\{ B\,(l - x) - P\,(d - x) - q(a - x) \right\} \qquad (1).$$

Dividasi $AH = x$ in un numero n grandissimo di parti eguali a δ, si otterranno tanti punti, che disteranno da A successivamente di 1δ, 2δ, 3δ . . . $n\delta$. Siano α_1, α_2, α_3 . . . gli archi di raggio 1, che misurano gli angoli delle tangenti in questi punti coll'orizzontale. Ponendo nella (I) per ρ successivamente i valori $\frac{\delta}{\text{tang.}\,\alpha_1 - \text{tang.}\,\alpha_2}$, $\frac{\delta}{\text{tang.}\,\alpha_2 - \text{tang.}\,\alpha_3}$ ecc., e per x i valori 1δ, 2δ, ecc. si otterà un numero di equazioni eguale a quello dei punti di divisione. Sommando i primi ed i secondi membri fra loro si avrà:

$$C - \text{tang.}\,\alpha = \frac{1}{ET}\left\{ Blx - \frac{1}{2}Bx^2 - Pdx + \frac{1}{2}Px^2 - qax + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}qx^2 \right\} \qquad \text{(II)}.$$

Per $x = 0$, tang. $\alpha = 0$, quindi $C = 0$; la tangente trigonometrica dell'angolo della tangente in un punto qualunque coll'orizzontale è data da

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{1}{ET}\left\{ -B\left(lx - \frac{1}{2}x^2\right) + P\left(dx - \frac{1}{2}x^2\right) + q\left(ax - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2}x^2\right)\right\} \qquad \text{(III)}.$$

Ponendo nella (III) per x successivamente 1δ, 2δ, 3δ . . . e per tang. α i rapporti tra le differenze z_1, z_2, z_3 . . . di due ordinate consecutive e la loro distanza δ, si ottengono le seguenti equazioni:

$$z_1 = \frac{\delta}{ET}\left\{ -B\left[l(1\delta) - \frac{1}{2}(1\delta)^2 \right] + P\left[d(1\delta) - \frac{1}{2}(1\delta)^2 \right] + \right.$$

$$\left. + q\left[a(1\delta) - \frac{1}{2}(1\delta)^2 \right] \right\}$$

$$z_2 = \frac{\delta}{ET}\left\{ -B\left[l(2\delta) - \frac{1}{2}(2\delta)^2 \right] + P\left[d(2\delta) - \frac{1}{2}(2\delta)^2 \right] + \right.$$

$$\left. + q\left[a(2\delta) - \frac{1}{2}(2\delta)^2 \right] \right\}$$

. . . .

Ora $z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n = y$ ordinata di un punto avente l'ascissa $nb = x$; perciò l'equazione della linea elastica sarà:

$$y = \frac{1}{ET} \left\{ -B\left(\frac{1}{2} lx^2 - \frac{1}{6} x^3\right) + P\left(\frac{1}{2} dx^2 - \frac{1}{6} x^3\right) + \right.$$

$$\left. + q\left(\frac{1}{2} ax^2 - \frac{1}{6} x^3\right) \right\} \quad \text{(IV).}$$

Per il punto C, si ha: $x = d$, tang. α = tang. β, $y = f$, quindi dalle (III) e (IV) si ottiene:

$$\text{ET tang. } \beta = -\frac{1}{2} Bd(2l - d) + \frac{1}{2} Pd^2 + \frac{1}{2} qd(2a - d) \quad \text{(V),}$$

$$f = \frac{1}{ET} \left\{ -\frac{1}{6} Bd^2(3l - d) + \frac{1}{3} Pd^3 + \frac{1}{6} qd^2(3a - d) \right\} \quad \text{(VI).}$$

Per la parte di linea posta alla destra di C si potranno stabilire le seguenti equazioni:

$$M = B(l - d - x') - q(a - d - x')$$

$$ET = \rho [B(l - d - x') - q(a - d - x')] \quad \text{(VII),}$$

$$\text{tang. } \alpha' = \frac{1}{ET} \left\{ -B(l - d)x' + \frac{1}{2} Bx'^2 + q(a - d)x' - \frac{1}{2} qx'^2 + \right.$$

$$\left. + \text{ET tang. } \beta \right\} \quad \text{(VIII).}$$

$$y' = \frac{1}{ET} \left\{ -\frac{1}{2} B(l - d)x'^2 + \frac{1}{6} Bx'^3 + \frac{1}{2} q(a - d)x'^2 - \frac{1}{6} qx'^3 + \right.$$

$$\left. + \text{ET}[x' \text{ tang. } \beta + f] \right\} \quad \text{(IX).}$$

Ora nel punto B l'ascissa $x' = d' = l - d$, l'ordinata $y' = 0$, e la tangente è orizzontale; sostituendo tali valori nelle (VIII) e (IX) si ha:

$$0 = -\frac{1}{2}B(l-d)^2 + \frac{1}{2}q(l-d)(2a-d-l) + ET \text{ tang. } \beta \quad (X),$$

$$0 = -\frac{1}{3}B(l-d)^3 + \frac{1}{6}q(l-d)^3(3a-2d-l) +$$
$$+ ET(l-d)\text{ tang. } \beta + ETf \quad (XI).$$

Eliminando ET tang. β, ETf dalle (V), (VI), (X) e (XI) si otterranno due equazioni, le quali serviranno per trovare i valori di B e q.

$$B = \frac{Pd^2(3la - 2l^2 - 2da + dl)}{l^3(a-l)} \quad (XII),$$

$$q = P\frac{d^2(l-d)}{l^2(a-l)} \quad (XIII).$$

Sostituendo nelle (I), (III) e (IV) i valori di B e q si ottiene:

$$ET = \rho P \left\{ \frac{d^2}{l^3}(2l^2 - dl - 3lx + 2dx) - d + x \right\} \quad (XIV),$$

$$\text{tang. } \alpha = \frac{P}{ET}\left\{ dx - \frac{1}{2}x^2 - \frac{d^2}{l^3}\left(2l^2x - ldx - \frac{3}{2}lx^2 + dx^2\right)\right\} \quad (XV),$$

$$y = \frac{P}{6ET}\left\{ 3dx^2 - x^3 - \frac{d^2x^2}{l^3}(6l^2 - 3dl - 3lx - 2dx)\right\} \quad (XVI).$$

Eguagliando a zero il polinomio fattore di ρP, si ha una equazione, dalla quale si potrà avere il valore dell'ascissa del punto avente il raggio di curvatura $= \infty$; questo punto divide la linea AC in due parti, una presentante la concavità verso il basso, l'altra verso l'alto.

Nel caso, in cui il peso P è nel mezzo della trave, la distanza $d = d' = \frac{1}{2}l$, ponendo tale valore nelle (XIV) e (XVI) si ha:

$$\rho = \frac{4ET}{P(2x-d)} \qquad (I)_a,$$

$$y = \frac{P}{4ET}\left\{\frac{1}{2}dx^2 - \frac{1}{3}x^3\right\} \qquad (II)_a.$$

La saetta della linea, ponendo $x = d$ nella $(II)_a$, è data da

$$f = \frac{P}{4ET}\left\{\frac{1}{2}d^3 - \frac{1}{3}d^3\right\} = \frac{1}{24}\frac{Pd^3}{ET} \qquad (III).$$

Ora $\rho = \infty$ per $x = \frac{1}{2}d$, quindi la linea ad $\frac{1}{4}$ ed a $\frac{3}{4}$ della sua lunghezza presenta un elemento rettilineo.

Nei punti estremi e nel punto intermedio i raggi di curvatura hanno eguale valore, quindi la linea presenta eguale curvatura.

Il raggio di curvatura poi è negativo da $x = 0$ od $x = \frac{1}{4}l$; positivo da $x = \frac{1}{4}l$ ad $x = \frac{3}{4}l$, e negativo da $x = \frac{3}{4}l$ ad $x = l$.

Esempio. Un parallelepipedo di larice, lungo 6^m coll'asse orizzontale, sia incastrato alle estremità. La sua sezione trasversale sia un rettangolo di base $b = 0^m,24$, di altezza $h = 0^m,34$. Si domanda:

1° Il peso che può sopportare la trave nel punto di mezzo.

2° L'abbassamento che tale punto subisce.

Per il larice, il coefficiente di resistenza $R = 60$ chilogr. per c.m., il modulo di elasticità $E = 120000$ chilogr. per c.m.q.

Il momento statico M rispetto ad una sezione qualunque è dalla $(I)_a$ dato $= \frac{1}{4}P(2x - d)$, quello rispetto alla sezione di mezzo è $= \frac{1}{4}Pd$; per la stabilità, dovrà avere luogo l'equazione

$$\frac{1}{4}Pd = \frac{RT}{\frac{1}{2}h},$$

da cui:

$$P = \frac{2}{3}\frac{bh^2}{d} \qquad (1).$$

Ponendo nella (1), $b=0{,}24$, $h=0^m{,}34$, $d=3$, si ottiene:

$$P=3600 \text{ chilogrammi},$$

dunque alla metà della trave si potrà applicare uno sforzo verticale di 3600 chilogrammi.

L'abbassamento, che subisce il punto di mezzo della trave, ossia

$$f=\frac{P\,d^3}{24\,ET}=\frac{3600\times 3^3}{24\,E\,\frac{1}{12}\,0{,}24\times 0{,}34^3}=\frac{1}{240}=0^m{,}004,$$

quindi il punto di mezzo della trave si abbassa di 4^{mm}.

§ 30. **Equazione della linea, secondo la quale si dispone l'asse rettilineo di una trave incastrata nelle due estremità e sollecitata da un peso uniformemente distribuito nella sua lunghezza.** — L'incastro nell'estremo B può essere sostituito da una forza verticale ascendente B, applicata nel punto B, e da una coppia il cui momento poniamo $=\mu$.

Essendo l la lunghezza della trave; il momento delle forze estrinseche rispetto ad una sezione posta a distanza x da un estremo è

$$M=B(l-x)-\mu-\frac{1}{2}p\,(l-x)^2 \qquad (1).$$

Ma $M=W=\frac{ET}{\rho}$, quindi:

$$ET=\rho\left\{B(l-x)-\mu-\frac{1}{2}p\,(l-x)^2\right\} \qquad (I).$$

Con ragionamento analogo a quello tenuto nel § precedente, si ottiene:

$$\text{tang.}\,\alpha=\frac{1}{ET}\left\{-B(lx-\frac{1}{2}x^2)+\mu x+\frac{1}{2}p\,(l^2x-lx^2+\frac{1}{3}x^3)\right\} \quad (2),$$

$$y=\frac{1}{ET}\left\{-B\,(\frac{1}{2}lx^2-\frac{1}{6}x^3)+\frac{1}{2}\mu x^2+\frac{1}{2}p\,(\frac{1}{2}l^2x^2-\frac{1}{3}lx^3+\frac{1}{12}x^4)\right\}$$
(3).

nelle quali:

α è l'angolo della tangente nel punto avente per ascissa x, coll'orizzontale,

y l'ordinata di tal punto,

T il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro,

E il modulo di elasticità.

Per $x = l$, tang. $\alpha = 0$, $y = 0$ quindi dalle (2) e (3) si ha:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \mu + \frac{1}{6} p l^2 - \frac{1}{2} B l \\ 0 &= \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{8} p l^2 - \frac{1}{3} B l \end{aligned}\right\} \quad (4),$$

da cui:

$$B = \frac{1}{2} p l \quad (5),$$

$$\mu = \frac{1}{12} p l^2 \quad (6).$$

Ponendo nella (1) per B e μ i loro valori, si ottiene:

$$M = \frac{1}{2} p \left\{ -\frac{1}{6} l^2 + l x - x^2 \right\},$$

ed il suo massimo valore $M_m = \frac{1}{24} p l^2$.

L'equazione di stabilità per questo prisma è

$$\frac{RT}{\frac{1}{2} h} = \frac{1}{24} p l^2 \quad (II).$$

Il valore della saetta f si ottiene ponendo nella (3), l'ascissa $x = \frac{l}{2}$, perciò:

$$f = \frac{1}{ET} \left\{ -\frac{5}{48} B l^3 + \frac{1}{8} \mu l^2 + \frac{17}{384} p l^4 \right\} \quad (7).$$

Sostituendo nelle (3) e (7) per B e μ i loro valori, si ha:

$$ETy = \frac{1}{24} px^2 (l - x)^2 \qquad (III),$$

$$ETf = \frac{1}{384} pl^4 \qquad (IV).$$

Il valore del raggio di curvatura è dato da (I), nella quale sostituendo a B e μ i loro valori, si ha:

$$ET = \frac{1}{2} \rho p \left(lx - x^2 - \frac{1}{6} l^2\right) \qquad (V),$$

dalla quale si trova, che la linea elastica presenta due punti d'inflesso, i quali sono posti simmetricamente rispetto al mezzo alla distanza $0{,}211l$ dagli estremi.

§ 31. Equazione della linea, secondo la quale si dispone l'asse rettilineo di un prisma sostenuto da tre appoggi posti sopra la stessa orizzontale e sollecitato da un peso uniformemente distribuito sopra la sua lunghezza. — Siano:

d e d' le distanze AB e BC (*Fig.* 29),

y, y', y'' e y''' le ordinate SH, S'H', S''H'' e S'''H''',

x, x', x'' e x''' le ascisse AS, DS', BS'' e FS''',

f, f' le saette ED, FG delle linee AB, BC,

β, β' e β'' gli archi di raggio 1, che misurano gli angoli delle tangenti nei punti E, B, G della linea coll'asse delle x,

α, α', α'', α''' gli archi di raggio 1, che misurano gli angoli delle tangenti nei punti H, H', H'', H''' coll'orizzontale,

A, B e C le reazioni degli appoggi A, B, C.

Poniamo $AC = l$ e sia p il peso, che gravita sopra l'unità di lunghezza, allora il peso totale, che sollecita la trave AC, è pl.

Per l'equilibrio dovranno avere luogo le eguaglianze:

$$A + B + C = pl \qquad (I),$$

$$dA + lB = \frac{1}{2} pl^2 \qquad (II).$$

Rispetto alla sezione H posta a distanza x dall'estremo A, si ha:

$$M = Ax - \frac{1}{2} px^2.$$

Ora $M = W = \frac{ET}{\rho}$, quindi:

$$ET = \rho\,(Ax - \frac{1}{2} p x^2) \qquad (1).$$

Scompongasi $AS = x$ in un numero n grandissimo di parti eguali a δ, si conducano le ordinate dei punti, aventi le ascisse 1δ, 2δ, 3δ, . . . $n\delta = x$.

Siano α_1, α_2, α_3, . . . α_n gli archi di raggio 1, che misurano gli angoli delle tangenti di quei punti coll'orizzontale, ponendo nella (1) per x successivamente 1δ, 2δ, 2δ, . . . $n\delta$, e per ρ i valori corrispondenti $\frac{\delta}{\text{tang.}\,\alpha_1 - \text{tang.}\,\alpha_2}$, $\frac{\delta}{\text{tang.}\,\alpha_2 - \text{tang.}\,\alpha_3}$ . . . si otterranno le equazioni:

$$ET\,(C - \text{tang.}\,\alpha_2) = \delta\,[A\,(1\delta) - \frac{1}{2} p\,(1\delta)^2],$$

$$ET\,(\text{tang.}\,\alpha_2 - \text{tang.}\,\alpha_3) = \delta\,[A\,(2\delta) - \frac{1}{2} p\,(2\delta)^2],$$

. . . .

$$ET\,(\text{tang.}\,\alpha_{n-1} - \text{tang.}\,\alpha) = \delta\,[A\,(n\delta) - \frac{1}{2} p\,(n\delta)^2],$$

quindi:

$$ET\,(C - \text{tang.}\,\alpha) = A\delta^2\,(1+2+3+\ldots+n) - \frac{1}{2} p\delta^3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 +$$

$$+ \ldots + n^2) = \frac{1}{2} Ax^2 - \frac{1}{6} p x^3 \qquad (2).$$

La tangente del punto, che ha l'ascissa $x = \frac{1}{2} d$ fa coll'orizzontale un angolo $\alpha = \beta$, quindi:

$$ET\,(C - \text{tg.}\,\beta) = \frac{1}{2} A \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \frac{1}{6} p \left(\frac{d}{2}\right)^3.$$

Ponendo nella (2) per ETC il suo valore, si ha:

$$\text{ET tang.}\,\alpha = \frac{1}{2}\text{A}\left\{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2\right\} - \frac{1}{6}p\left\{\left(\frac{d}{3}\right)^3 - x^3\right\} + \text{ET tg.}\,\beta \quad (3).$$

Siano z_1, z_2, z_3 . . . z_n le differenze successive delle ordinate dei punti, le cui ascisse sono 1δ, 2δ, 3δ, . . . $n\delta$, per $x = 1\delta$, si ha: tang. $\alpha_1 = \frac{z_1}{\delta}$, per $x = 2\delta$ il valore di tang. $\alpha_2 = \frac{z_2}{\delta}$, ecc..., dunque dalla (3) si otterranno le equazioni seguenti:

$$\text{ET}z_1 = \frac{\delta}{2}\text{A}\left\{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \delta^2\right\} - \frac{\delta}{6}p\left\{\left(\frac{d}{2}\right)^3 - \delta^3\right\} + \delta\text{ET tang.}\,\beta,$$

$$\text{ET}z_2 = \frac{\delta}{2}\text{A}\left\{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - (2\delta)^2\right\} - \frac{\delta}{6}p\left\{\left(\frac{d}{2}\right)^3 - (2\delta)^3\right\} + \delta\text{ET tang.}\,\beta.$$

. . . .

Ora $z_1 + z_2 + z_3 + \ldots = y$ ordinata del punto della linea avente $n\delta = x$ per ascissa, quindi si avrà:

$$\text{ET}y = \frac{1}{2}\text{A}\left\{\left(\frac{d}{2}\right)^2 x - \frac{1}{3}x^3\right\} - \frac{1}{6}p\left\{\left(\frac{d}{2}\right)^3 x - \frac{x^4}{4}\right\} +$$

$$+ x\text{ET tang.}\,\beta \quad (4).$$

Il punto di mezzo di AB ha l'ordinata $y = f$, l'ascissa $x = \frac{1}{2}d$, quindi:

$$\text{ET}f = \frac{1}{3}\text{A}\left(\frac{d}{3}\right)^3 - \frac{1}{8}p\left(\frac{d}{2}\right)^4 + \frac{d}{2}\text{ET tang.}\,\beta \quad (\text{III}).$$

Consideriamo ora l'altra porzione EB della linea AB. Il momento statico delle forze estrinseche rispetto al punto H', è:

$$\text{M}' = \left(\frac{d}{2} + x'\right)\text{A} - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2} + x'\right)^2 p,$$

quindi per la stabilità:

$$ET = \rho \left\{ A\left(\frac{d}{2}+x'\right) - \frac{1}{2}p\left(\frac{d}{2}+x'\right)^2 \right\} \qquad (5),$$

operando nel modo seguito per lo studio della linea AE, si ottiene:

$$ET(C - \text{tang. } \alpha') = \frac{1}{2}A\left(\frac{d}{2}x' + \frac{1}{2}x'^2\right) - \frac{p}{2}\left(\frac{d^2}{4}x' + \frac{1}{3}x'^3 + \frac{1}{2}dx'^2\right) \qquad (6).$$

Ora per $x' = 0$, l'angolo $\alpha' = \beta$, quindi:

$$ET \text{ tang. } \alpha' = ET \text{ tang. } \beta = ETC.$$

Sostituendo nella (6), si ottiene:

$$ET \text{ tang. } \alpha' = -A\left(\frac{d}{2}x' + \frac{1}{2}x'^2\right) + \frac{p}{2}\left(\frac{d^2}{4}x' + \frac{1}{3}x'^3 + \frac{1}{2}dx'^2\right) + $$

$$+ ET \text{ tang. } \beta \qquad (7),$$

da cui:

$$ETy' = -\frac{1}{2}A\left\{\frac{d}{2}x'^2 + \frac{1}{3}x'^3\right\} + \frac{p}{2}\left\{\left(\frac{d}{2}\right)^2\frac{x'^2}{2} + \frac{1}{12}x'^4 + \frac{1}{3}\left(\frac{d}{2}\right)x'^3\right\} +$$

$$+ xET \text{ tang. } \beta + ETf \qquad (8).$$

Per $x' = \frac{d}{2}$, si ha $y' = 0$, tang. $\alpha' =$ tang. β', dunque dalle (7), (8), si avrà:

$$ET \text{ tang. } \beta' = -\frac{2}{3}A\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{7}{6}p\left(\frac{d}{2}\right)^3 + ET \text{ tang. } \beta \quad (IV),$$

$$-ETf = -\frac{2}{3}A\left(\frac{d}{2}\right)^3 + \frac{11}{24}\left(\frac{d}{2}\right)^4 p + \frac{d}{2}ET \text{ tang. } \beta \qquad (V).$$

Dalle (III) e (V), risulta:

$$ET \text{ tang. } \beta' = \frac{1}{6}A\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \frac{1}{6}p\left(\frac{d}{2}\right)^3. \qquad (9).$$

Ponendo questo valore nelle (IV) e (V), si ottiene:

$$\mathrm{ET\ tang.}\ \beta' = -\frac{4}{3}\mathrm{A}\left(\frac{d}{2}\right)^2 + p\left(\frac{d}{2}\right)^3 \qquad \text{(VI)},$$

$$\mathrm{ET}f = \frac{1}{2}\mathrm{A}\left(\frac{d}{2}\right)^3 - \frac{7}{24}\,p\left(\frac{d}{2}\right)^4 \qquad \text{(VII)}.$$

Passiamo ora a studiare la prima metà della linea BC. Rispetto al punto H″, si ha:

$$\mathrm{M}'' = \mathrm{C}\,(l-d-x'') - \frac{1}{2}p\,(l-d-x'')^2 = \frac{\mathrm{ET}}{\rho} \qquad (10),$$

da cui:

$$\mathrm{ET\ tang.}\ \alpha'' = -(l-d)\,\mathrm{C}x'' + \frac{1}{2}x''^2\,\mathrm{C} + \frac{1}{2}p\,(l-d)^2\,x'' -$$

$$-\frac{1}{2}p\,(l-d)\,x''^2 + \frac{1}{6}px''^3 + \mathrm{ET\ tang.}\ \beta',$$

$$\mathrm{ET}y'' = -\frac{1}{2}(l-d)\,\mathrm{C}x''^2 + \frac{1}{6}\mathrm{C}x''^3 + \frac{1}{4}p\,(l-d)^2\,x''^2 -$$

$$-\frac{1}{6}p\,(l-d)\,x''^3 + \frac{1}{24}\,px''^4 + x''\,\mathrm{ET\ tang.}\ \beta'.$$

Per $x'' = \frac{1}{2}d' = \frac{l-d}{2}$, si ha $y'' = f'$ ed $\alpha'' = \beta''$, quindi dalle precedenti due equazioni, si ha:

$$\mathrm{ET\ tang.}\ \beta'' = -\frac{3}{8}\mathrm{C}\,(l-d)^2 + \frac{7}{48}\,p\,(l-d)^3 + \mathrm{ET\ tang.}\ \beta' \quad \text{(VIII)},$$

$$\mathrm{ET}f' = -\frac{5}{48}\,(l-d)^3\,\mathrm{C} + \frac{17}{384}\,(l-d)^4\,p + \frac{l-d}{2}\mathrm{ET\ tang.}\ \beta'\ \text{(IX)}.$$

Il punto H″ posto nella parte FC della linea BC ha l'ascissa

$$CJ''' = l - d - \frac{1}{2} d' - x''' = \frac{l-d}{2} - x''',$$

quindi:

$$M''' = \frac{ET}{\rho} = C\left(\frac{l-d}{2} - x'''\right) - \frac{p}{2}\left(\frac{l-d}{2} - x'''\right)^2,$$

$$ET \text{ tang. } \alpha''' = -\left(\frac{l-d}{2}\right) x''' C + \frac{1}{2} x'''^2 C + \frac{1}{2} p \left(\frac{l-d}{2}\right)^2 x''' -$$

$$- \frac{p}{2}\left(\frac{l-d}{2}\right) x'''^2 + \frac{p}{6} x'''^3 + ET \text{ tang. } \beta'' \qquad (11),$$

$$ETy''' = -\frac{1}{2} C \left(\frac{l-d}{2}\right) x'''^2 + \frac{1}{6} C x'''^3 + \frac{1}{4} p \left(\frac{l-d}{2}\right)^2 x'''^2 -$$

$$- \frac{1}{6} p \left(\frac{l-d}{2}\right) x'''^3 + \frac{1}{24} p x'''^4 + x''' ET \text{ tang } \beta'' + ETf'.$$

Per $x''' = FC = \frac{1}{2} d' = \frac{1}{2}(l-d)$, si ha $y''' = 0$, quindi dalla precedente risulta:

$$ETf' = \frac{1}{24} C (l-d)^3 - \frac{1}{128} (l-d)^4 p - \frac{l-d}{2} ET \text{ tang. } \beta'' \quad (X).$$

Dalle (IX) e (X), si ottiene:

$$ET \text{ tang. } \beta'' = \frac{7}{24} C (l-d)^2 - \frac{10}{96} p (l-d)^3 - ET \text{ tang. } \beta' \ (12).$$

Il secondo membro della (VIII), eguaglia quello della (12), quindi:

$$ET \text{ tang. } \beta' = \frac{1}{3} C (l-d)^2 - \frac{1}{8} p (l-d)^3 \qquad (XI).$$

Ponendo tale valore in (12), si ha:

$$\text{ET tang. } \beta'' = -\frac{1}{24} C (l-d)^2 + \frac{1}{48} p (l-d)^3 \qquad \text{(XII)}.$$

Sostituendo nella (X) per ET tang. β'', il suo valore si ha:

$$\text{ET} f' = \frac{1}{16} C (l-d)^3 - \frac{7}{384} p (l-d)^4 \qquad \text{(XIII)}.$$

Quando siano noti i valori delle reazioni A, B e C, si potranno avere i valori delle saette f, f' dalle (VII) e (XIII).

I valori di ET tang. β' dati dalle equazioni (VI) e (XI) devono essere eguali, perciò:

$$-\frac{4}{3} A \frac{d}{2} + p \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{1}{3} C (l-d)^2 - \frac{1}{8} p (l-d)^3,$$

da cui:

$$A = \frac{3}{8} \frac{(l-d)^3 + d^3}{d^2} p - C \frac{(l-d)^2}{d^2} \qquad \text{(XIV)}.$$

Ora le (I), (II) e (XIV), sono tre equazioni, che contengono le incognite A, B e C, risolvendole, si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{3l^2 - 5ld + d^2}{8(l-d)} p \\ B &= \frac{l(l^2 + ld - d^2)}{8d(l-d)} p \\ A &= \frac{d^2 + 3dl - l^2}{8d} p \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XV)}.$$

Se gli appoggi sono ad eguale distanza, allora $d = \frac{1}{2} l$, quindi:

$$\left.\begin{aligned} A = C &= \frac{3}{16} pl \\ B &= \frac{10}{16} pl \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVI)},$$

e la saetta

$$f = f = \frac{1}{3072\,\text{ET}} p l^4 \qquad \text{(XVII)}.$$

Il raggio di curvatura dei punti di AB o CB della linea AC, si ottiene dalle (1) e (5).

La curva fino al punto posto alla distanza di $\frac{3}{4} d$ da A, presenta la concavità rivolta al basso, mentre in B la linea presenta la convessità verso l'alto.

Per $x = 0$ si ha $\rho = \infty$, per $x = \frac{3}{16} l$, si ottiene:

$$\rho = \frac{512}{9} \frac{\text{ET}}{p l^2} = \frac{57\,\text{ET}}{p l^2};$$

per $x = \frac{3}{4} d$, si ha $\rho = \infty$.

Nel punto B la curvatura della linea è massima, quindi la sezione B è la più pericolosa.

Per tal punto il raggio

$$\rho = -\frac{32\,\text{ET}}{p l^2},$$

quindi:

$$\frac{\text{ET}}{\rho} = \text{M} = \frac{p l^2}{32} \qquad \text{(XVIII)}.$$

Se $d = 0{,}3027 \ldots l$, allora:

$$\text{A} = 0,$$

$$\text{B} = 0{,}718\, p l,$$

$$\text{C} = 0{,}282\, p l.$$

In questo caso il prisma non esercita alcuna pressione sopra l'appoggio A, la saetta della linea AB è negativa, ed

$$f = -\frac{1}{\text{ET}} 0{,}0001526\, p l^4,$$

e quella della linea BC è:

$$f' = \frac{1}{\mathrm{ET}} 0{,}021517\, pl^4.$$

Esempio. Una trave a traliccio in legno, di lunghezza $l = 50^m$ e di altezza $h = 6^m$, è sostenuta nelle due estremità e nel punto di mezzo.

La parte superiore e la parte inferiore della trave sono formate di un parallelepipedo di larice, la cui sezione trasversale ha la base $= 0^m{,}42$, l'altezza $= 0^m{,}44$.

Si domandano:

1° Le reazioni degli appoggi.

2° Il peso p, che può sopportare per ogni metro di lunghezza.

3° L'abbassamento $f = f'$ dei punti di mezzo delle due travate.

Dalle (XVI) si ha:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A} = \mathrm{C} &= \frac{3}{16}\, 50^m\, p = 9{,}37\, p \\ \mathrm{B} &= \frac{10}{16}\, 50\, p = 31{,}25\, p \end{aligned}\right\} \qquad (13).$$

Il valore del momento statico delle forze estrinseche rispetto ad una sezione, posta a distanza x da un estremo, è:

$$\mathrm{M} = \mathrm{A}x - \frac{1}{2} px^2;$$

ponendo per A il suo valore, si ha:

$$\mathrm{M} = 9{,}37\, px - \frac{1}{2} px^2.$$

Il momento della sezione più pericolosa è:

$$\mathrm{M} = 78p \qquad (14).$$

Ora il momento di resistenza

$$\mathrm{W} = \frac{\mathrm{RT}}{\frac{1}{2}h} \qquad (15).$$

Nel nostro caso:

$$R = 60 \text{ chilogr. per c.m.q.}$$

$$\frac{1}{2} h = 3^m,$$

$$T = \frac{1}{12} \left\{ 0{,}24 \times 6^3 - 0{,}24 \times 5{,}12^3 \right\} = 1{,}63566,$$

quindi:

$$W = 327132.$$

Per la stabilità deve avere luogo l'equazione:

$$327132 = 78\, p,$$

da cui:

$$p = 4190 \text{ chilogrammi};$$

dunque:
la reazione di ciascuno degli appoggi estremi è $A = C = 39260{,}30$ chilogrammi,
la reazione dell'appoggio di mezzo è $B = 130937{,}50$ chilogrammi.

Il peso che può sopportare per ogni metro di lunghezza è $p = 4190$ chilogrammi.

Ora l'abbassamento

$$f = f' = \frac{pl^4}{3072\, ET},$$

$$ET = 179922600$$

$$\frac{1}{3072} pl^4 = \frac{1}{3072} 4190 . 50^4 = 8524576,$$

dunque:

$$f = f' = 0^m{,}0047 \ldots.$$

§ 32. Reazioni dei quattro appoggi, disposti simmetricamente rispetto al mezzo, i quali sostengono una trave caricata di un peso uniformemente distribuito nella sua lunghezza. — Una trave

caricata di un peso uniformemente distribuito sulla sua larghezza l sia sostenuta da quattro appoggi A, B, C, D, disposti in modo da essere $AB = CD = d$.

Le reazioni del primo e quarto appoggio saranno eguali, come quelle del secondo e del terzo.

Con metodo analogo a quello tenuto nel precedente paragrafo, si troverà:

$$\left.\begin{aligned} A = D &= \frac{6l^2 d - l^3 - 6ld^2 - d^3}{4d\,(3l - 4d)}\,p \\ B = C &= \frac{l^3 + d^3 - 2ld^2}{4d\,(3l - 4d)}\,p \end{aligned}\right\} \qquad (I).$$

Nel caso, in cui $AB = BC = CD$, ossia $d = \frac{1}{3}l$, si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{2}{15}\,pl \\ B &= \frac{11}{30}\,pl \end{aligned}\right\} \qquad (II).$$

Se $AB = CD = \frac{1}{4}l$, allora si ha:

$$\left.\begin{aligned} A &= 0{,}0546\,pl \\ B &= 0{,}445\,pl \end{aligned}\right\} \qquad (III).$$

Quando $d = 0{,}21l$, allora $A = D = 0$, ossia gli appoggi estremi non soffrono alcuna pressione.

Articolo III. — Trave appoggiata a più punti.

§ 33. **Nozioni generali sopra il problema. Determinare l'equazione di stabilità per una trave appoggiata a più punti e caricata di pesi uniformemente distribuiti sopra la sua lunghezza.** — I pesi uniformemente distribuiti sopra la lunghezza di una trave orizzontale appoggiata a più punti, vi cimentano la resistenza alla flessione.

Un'equazione di stabilità è $M = W$, nella quale M è il momento statico delle forze estrinseche rispetto al centro di gravità

della sezione, che si considera, W è il suo momento di resistenza; il valore di questo dipende dalla forma della sezione e dalla materia componente la trave, quello di M per la data sezione dipende e dal carico che gravita sopra la trave e dalle pressioni esercitate sopra gli appoggi, i valori delle quali non possono venire determinate colle semplici condizioni di equilibrio statico, quando il numero dei sostegni è maggiore di due.

Il metodo seguìto nel § 31 per la trave appoggiata a tre punti può estendersi al caso, in cui gli appoggi sono in numero qualunque; tale procedimento somministra tante equazioni, quante sono le reazioni incognite, le quali diverrebbero note dopo un calcolo lungo, faticoso e non suscettibile di pratiche applicazioni. Meglio però è ricorrere, per il calcolo della trave appoggiata a più punti, al processo razionale e pratico dovuto ai lavori di Clapeyron, Bertot e Bresse, nel quale si trovano le reazioni degli appoggi dai momenti inflettenti rispetto alle sezioni estreme ed alle intermedie appoggiate; e si determinano i valori di M per tutte le altre sezioni con un procedimento grafico di facile costruzione.

§ 34. Teorema dei tre momenti. — Determinazione analitica e grafica dei valori di M rispetto alle sezioni poste sopra gli appoggi.

Sia XX (*Fig.* 30) una porzione di trave appoggiata ai tre punti A, B e C, posti sopra la stessa orizzontale. Poniamo:

l' ed l'' le distanze AB e BC,

p' il peso distribuito sopra l'unità di lunghezza di AB,

p'' quello distribuito sopra l'unità di lunghezza di BC,

m', m'' e m''' i momenti inflettenti rispetto alle sezioni A, B e C,

x la distanza della sezione H dall'appoggio A.

Per tale sezione si ha:

$$M_x = W = \frac{ET}{\rho} = \frac{RT}{\frac{1}{2}h},$$

dove, colle lettere E, T, R, ρ ed h si esprimono successivamente il modulo di elasticità, il momento d'inerzia, il coefficiente di resistenza, il raggio di curvatura e l'altezza della sezione.

Il momento statico delle reazioni degli appoggi B, C, ... rispetto alla H vien dato dalla somma della quantità costante r col prodotto della quantità costante s per l'ascissa x ossia da $r + sx$.

Analogamente il momento del peso distribuito nella parte di trave a destra di B è $r' + s'x$; il momento del peso distribuito in BH è $\frac{1}{2} p' (l' - x)^2$, quindi si può porre:

$$M_x = M + Nx - \frac{1}{2} px^2 = \frac{ET}{\rho} \qquad (I),$$

valutando, come positivi i momenti delle forze verticali dirette verso l'alto, negativi quelli dei pesi.

Ora $\rho = \frac{s}{\text{tang. } \alpha_n - \text{tang. } \alpha_{n+1}}$, esprimendo con s la lunghezza dell'archetto, che si considera, con α_n ed α_{n+1} gli angoli, che le tangenti ai punti estremi dell'arco, fanno coll'orizzontale, quindi:

$$\text{tang. } \alpha_n - \text{tang. } \alpha_{n+1} = \frac{s}{ET} \left\{ M + Nx - \frac{1}{2} px^2 \right\}.$$

Scompongasi x in un numero n grandissimo di parti eguali a δ, esprimiamo con α_1, α_2, α_3 . . . α_n, gli angoli, che le tangenti in tali punti fanno coll'orizzontale, e con C' la tangente trigonometrica dell'angolo, che la tangente in A forma coll'orizzontale, si ottiene:

$$ET (\text{tang. } \alpha_1 - C') = \delta \left\{ M + N (1\delta) - \frac{1}{2} p' (1\delta)^2 \right\},$$

$$ET (\text{tang. } \alpha_2 - \text{tang. } \alpha_1) = \delta \left\{ M + N (2\delta) - \frac{1}{2} p' (2\delta)^2 \right\},$$

. . . .

$$ET (\text{tang. } \alpha - \text{tang. } \alpha_{n-1}) = \delta \left\{ M + N (n\delta) - \frac{1}{2} p' (n\delta)^2 \right\}.$$

La somma dei primi membri eguaglia quella dei secondi, quindi:

$$ET (\text{tang. } \alpha - C') = Mx + \frac{1}{2} Nx^2 - \frac{1}{6} p'x^3 \qquad (1).$$

Per $x = l'$, tang. $\alpha = C''$ tang. trigonom. dell'angolo della tangente in B coll'orizzontale, quindi:

$$\text{ET}\,(C'' - C') = Ml' + \frac{1}{2} Nl'^2 - \frac{1}{6} p'l'^3 \qquad (2).$$

Ora dalla figura si vede, che:

$$\text{tang. } \alpha_1 = \frac{ab}{\delta}, \qquad \text{tang. } \alpha_2 = \frac{cd}{\delta} \;\ldots;$$

ponendo nella (1) per x successivamente 1δ, 2δ, 3δ, ecc., si ottiene:

$$\text{ET}\,(ab) = \delta \left\{ \text{ETC}' + M\,(1\delta) + \frac{1}{2} N\,(1\delta)^2 - \frac{1}{6} p'\,(1\delta)^3 \right\},$$

$$\text{ET}\,(cd) = \delta \left\{ \text{ETC}' + M\,(2\delta) + \frac{1}{2} N\,(2\delta)^2 - \frac{1}{6} p'\,(2\delta)^3 \right\}.$$

. . . .

Quindi:

$$\text{ET}\,(ab + cd + \ldots) = \text{ET}y = \text{ETC}'x + \frac{1}{2} Mx^2 + \frac{1}{6} Nx^3 - \frac{1}{24} p'x^4 \qquad (3).$$

Per $x = l'$, $y = 0$,

$$-\text{ETC}' = \frac{1}{2} Ml' + \frac{1}{6} Nl'^2 - \frac{1}{24} p'l'^3 \qquad (4).$$

Ponendo nella (2) per ETC′ il valore dato da (4), risulta la seguente equazione:

$$\text{ETC}'' = \frac{1}{2} Ml' + \frac{1}{3} Nl'^2 - \frac{1}{8} p'l'^3 \qquad (5).$$

Rispetto ad una sezione qualunque di BC, il momento è

$$M_x = M' + N'x - \frac{1}{2} p''x^2,$$

operando analogamente al modo seguìto per AB, si ha:

$$-ETC''=\frac{1}{2}M'l''+\frac{1}{6}N'l''^2-\frac{1}{24}p''l''^3 \qquad (6).$$

I valori di ETC'' dati dalle (5) e (6) devono essere eguali tra loro, perciò:

$$\frac{1}{2}Ml'+\frac{1}{2}M'l''+\frac{1}{3}Nl'^2+\frac{1}{6}N'l''^2-\frac{1}{8}p'l'^3-\frac{1}{24}p''l''^3=0 \quad (II),$$

per $x=0$, si ha:

$$M_0=M=m',$$

per $x=l'$, si ha:

$$M_{l'}=M+Nl'-\frac{1}{2}p'l'^2=m'',$$

da cui:

$$N=\frac{1}{2}p'l'+\frac{m''-m'}{l'}.$$

Analogamente, si trova:

$$M'=m'', \quad N'=\frac{1}{2}p''l''+\frac{m'''-m''}{l''}.$$

Ponendo nella (II) per M, M', N ed N' i loro valori, si ottiene la seguente relazione tra m', m'' ed m''':

$$\frac{1}{2}m'l'+\frac{1}{2}m''l''+\frac{1}{3}l'^2\left(\frac{1}{2}p'l'+\frac{m''-m'}{l'}\right)+\frac{1}{6}l''^2\left(\frac{1}{2}p''l''+\right.$$

$$\left.+\frac{m'''-m''}{l''}\right)-\frac{1}{8}p'l'^3-\frac{1}{24}p''l''^3=0,$$

da cui:

$$m'l'+2m''(l'+l'')+m'''l''+\frac{1}{4}(p'l'^3+p''l''^3)=0 \qquad (III).$$

relazione, che serve a stabilire tante equazioni, quanti sono gli appoggi meno due; quindi sapendo che M per le sezioni estreme è zero, facilmente si troveranno i valori dei momenti inflettenti m', m'', m''', m'''' . . . , corrispondenti alle sezioni poste sopra gli appoggi.

Quando si conoscono i valori dei momenti corrispondenti alle sezioni poste sopra due appoggi successivi, con una costruzione grafica si potranno facilmente avere quelli rispetto agli altri appoggi.

Portiamo sopra le verticali condotte dai punti A, B e C della trave le lunghezze Aa, Bb, Cc (*Fig.* 31), eguali ai momenti m', m'' ed m'''; raddoppiamo la lunghezza Bb prendendo B$\beta = 2m''$, colle rette $a\beta$ e βc formeremo i trapezii ABβa, BC$c\beta$, dei quali la superficie è:

$$AB\frac{Aa+B\beta}{2}+BC\frac{B\beta+Cc}{2}=-\frac{1}{2}\left[l'm'+2m''(l'+l'')+m'''l''\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(p'l'^3+p''l''^3)=\frac{1}{2}P.$$

Dal teorema dei tre momenti si ha dunque la misura dell'area formata dalla somma delle figure ABβa, BβcC, delle quali le basi hanno le lunghezze l', l'', le altezze hanno un rapporto semplice coi momenti inflettenti sopra gli appoggi. Questa proprietà può servirci a trovare il valore di m''', quando siano noti quelli di m' e di m''.

Sia in valore assoluto A$a = m'$, B$b = m''$, prendiamo Bβ = 2Bb; la lunghezza C$c = m'''$ è la incognita da determinarsi.

Prendansi i punti δ, ϵ di mezzo dei lati $a\beta$, βc; per questi due punti tiriamo la retta $\delta\epsilon$, che sega le verticali Aa, Cc nei punti p e q.

L'area del trapezio ApqB eguaglia la somma delle aree dei trapezii ABβa, BC$c\beta$. Per I, punto di mezzo della retta AC, conduciamo la verticale IL, che sega la pq nel punto H, noto di posizione per essere $(IH)=\frac{\frac{1}{2}P}{(AC)}$.

Conoscendo la posizione dei punti δ ed H, si potrà segnare e la pq ed il punto ϵ d'intersezione della pq colla verticale EE' condotta dal punto di mezzo di BC; l'incontro della $\beta\epsilon$ colla verticale Cq è il punto c domandato, la retta Cc avrà con m''' lo stesso rapporto di Bb con m'', e di Aa con m'.

§ 35. Reazioni degli appoggi di una trave orizzontale appoggiata in più punti. — Una trave di lunghezza l (*Fig.* 32) sia appoggiata a più punti posti successivamente alle distanze l_1, l_2, l_3 . . . ; esprimiamo con m_0, m_1, m_2 . . . i valori di M relativi alle sezioni di appoggio; con A, B, C, D . . . le reazioni degli appoggi, con p_1, p_2, p_3 . . . i pesi distribuiti per ogni unità di lunghezza delle parti AB, BC, CD . . . Ora rispetto alla sezione B si ha:

$$m_1 = \mathrm{A} l_1 - \frac{1}{2} p_1 l_1^2,$$

da cui:

$$\mathrm{A} = \frac{m_1}{l_1} + \frac{1}{2} p_1 l_1 \qquad \text{(I)},$$

rispetto alla sezione C il momento

$$m_2 = \mathrm{A}(l_1 + l_2) + \mathrm{B} l_2 - p_1 l_1 \left(\frac{1}{2} l_1 + l_2\right) - \frac{1}{2} p_2 l_2^2 =$$

$$= m_1 + l_2 (\mathrm{A} + \mathrm{B}) - \frac{1}{2} p_2 l_2^2 - p_1 l_1 l_2,$$

da cui:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \frac{m_2 - m_1}{l_2} + \frac{1}{2} p_2 l_2 + p_1 l_1 \qquad \text{(II)},$$

analogamente si troverà:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = \frac{m_3 - m_2}{l_3} + \frac{1}{2} p_3 l_3 + p_2 l_2 + p_1 l_1 \qquad \text{(III)},$$

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{D} = \frac{m_4 - m_3}{l_4} + \frac{1}{2} p_4 l_4 + p_3 l_3 + p_2 l_2 + p_1 l_1 \qquad \text{(IV)},$$

. . . .

dalle quali equazioni si vede, che trovati i valori dei momenti m_1, m_2, m_3 . . . si potranno determinare quelli delle reazioni A, B, C, D, ecc.

1° *Caso particolare*. Sia una trave appoggiata ai quattro punti A, B, C e D; poniamo:

l_1, l_2, l_3 le lunghezze dei tratti AB, BC e CD,

m_0, m_1, m_2, ed m_3 i valori dei momenti inflettenti rispetto alle sezioni di appoggio,

p_1, p_2, p_3 i pesi distribuiti sopra l'unità di lunghezza delle parti AB, BC e CD.

Dalla (III) del § 34 si ottengono le equazioni:

$$\left.\begin{aligned} 2m_1(l_1+l_2)+m_2l_2+\frac{1}{4}(p_1l_1^3+p_2l_2^3)=0 \\ m_1l_2+2m_2(l_2+l_3)+\frac{1}{4}(p_2l_2^3+p_3l_3^3)=0 \end{aligned}\right\} \quad (1),$$

essendo $m_0=m_3=0$.

Risolvendo le (1) si avranno i valori dei momenti m_1, m_2.

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{\frac{1}{2}(p_1l_1^3+p_2l_2^3)(l_2+l_3)-\frac{1}{4}(p_2l_2^3+p_3l_3^3)\,l_2}{l_2^2-4(l_1+l_2)(l_2+l_3)} \\ m_2 &= \frac{\frac{1}{2}(p_2l_2^3+p_3l_3^3)(l_1+l_2)-\frac{1}{4}(p_1l_1^3+p_2l_2^3)\,l_2}{l_2^2-4(l_1+l_2)(l_2+l_3)} \end{aligned}\right\} \quad (2).$$

Le reazioni A, B, C, D degli appoggi saranno date dalle seguenti equazioni:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{m_1}{l_1}+\frac{1}{2}p_1l_1 \\ B &= \frac{m_2}{l_2}-m_1\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)+\frac{1}{2}(p_2l_2+p_1l_1) \\ C &= \frac{m_1}{l_2}-m_2\left(\frac{1}{l_3}+\frac{1}{l_2}\right)+\frac{1}{2}(p_3l_3+p_2l_2) \\ D &= \frac{m_2}{l_3}+\frac{1}{2}p_3l_3 \end{aligned}\right\} \quad (3).$$

Quando le parti AB e CD hanno eguale lunghezza e sono caricate da pesi eguali, ossia se $l_1 = l_3 = l$, $p_1 = p_3 = p$, allora:

$$m_1 = m_2 = m = \frac{\frac{1}{2}(p_2 l_2^3 + pl^3)(l_1 + l_2) - \frac{1}{4}(pl^3 + p_2 l_2^3)\, l_2}{l_2^2 - 4\,(l + l_2)^2} \qquad (4),$$

$$\left.\begin{aligned} A = D &= \frac{m}{l} + \frac{1}{2} pl \\ B = C &= -\frac{m}{l} + \frac{1}{2}(pl + p_2 l_2) \end{aligned}\right\} \qquad (5).$$

Quando le parti AB, BC, CD eguali, sono tutte caricate egualmente, ossia se $l_1 = l_2 = l_3 = l$; $p_1 = p_2 = p_3 = p$, allora:

$$m_1 = m_2 = -\frac{1}{10}\, pl^2 \qquad (6),$$

$$\left.\begin{aligned} A = D &= \frac{2}{5}\, pl \\ C = B &= \frac{11}{10}\, pl \end{aligned}\right\} \qquad (7).$$

2° *Caso particolare*. Una trave xy sia appoggiata ai cinque punti A, B, C, D, E posti alle distanze l_1. l_2, l_3, l_4.

Siano p_1, p_2, p_3 e p_4 i pesi, che gravitano rispettivamente sopra l'unità di lunghezza di ciascuna delle parti AB, BC, CD e DE della trave.

Esprimiamo con m_0, m_1, m_2, m_3 ed m_4 i momenti inflettenti relativi alle sezioni di appoggio.

Dalla (III) del § 34 si ottengono le seguenti equazioni:

$$\left.\begin{aligned} m_0 l_1 + 2m_1 (l_1 + l_2) + m_2 l_2 + \frac{1}{4}(p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3) &= 0 \\ m_1 l_2 + 2m_2 (l_2 + l_3) + m_3 l_3 + \frac{1}{4}(p_2 l_2^3 + p_3 l_3^3) &= 0 \\ m_2 l_3 + 2m_3 (l_3 + l_4) + m_0 l_4 + \frac{1}{4}(p_3 l_3^3 + p_4 l_4^3) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8).$$

Ora il momento $m_0 = 0$, ponendo:

$$\frac{1}{4}(p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3) = \rho,$$

$$\frac{1}{4}(p_2 l_2^3 + p_3 l_3^3) = \sigma,$$

$$\frac{1}{4}(p_3 l_3^3 + p_4 l_4^3) = \tau,$$

risolvendo le (8) risulteranno i seguenti valori per i momenti inflettenti relativi alle sezioni d'appoggio.

$$\left.\begin{aligned}
m_1 &= -\frac{\rho}{2(l_1+l_2)} + \frac{\tau l_2}{2l_3(l_1+l_2)} + \frac{2l_2(l_3+l_4)}{2l_3(l_1+l_2)} m_3 \\
m_2 &= -\frac{\tau}{l_3} - \frac{2(l_3+l_4)}{l_3} m_3 \\
m_3 &= \frac{2\sigma l_3(l_1+l_2) - \rho l_2 l_3 - \tau[4(l_1+l_2)(l_2+l_3) - l_2^2]}{8(l_1+l_2)(l_2+l_3)(l_3+l_4) - 2l_2^2(l_3+l_4) - 2l_3^2(l_1+l_2)}
\end{aligned}\right\} \quad (9).$$

Dalle (I), (II), (III), ecc., si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{m_1}{l_1} + \frac{1}{2} p_1 l_1 \\
B &= \frac{m_2}{l_2} - m_1\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) + \frac{1}{2}(p_2 l_2 + p_1 l_1) \\
C &= \frac{m_3}{l_3} - m_2\left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3}\right) + \frac{m_1}{l_2} + \frac{1}{2}(p_3 l_3 + p_2 l_2) \\
D &= \frac{m_2}{l_3} - m_3\left(\frac{1}{l_3} + \frac{1}{l_4}\right) + \frac{1}{2}(p_4 l_4 + p_3 l_3) \\
E &= \frac{m_3}{l_4} + \frac{1}{2} p_4 l_4
\end{aligned}\right\} \quad (10).$$

Se le parti estreme e le intermedie sono eguali ed egualmente caricate, ossia se $l_1 = l_4$, $l_2 = l_3$, $p_1 = p_4$, $p_2 = p_3$, allora:

$$\left.\begin{aligned} m_3 = m_1 &= \frac{-2p_1 l_1^3 - p_2 l_2^3}{16(l_1 + l_2) - 4l_2} \\ m_2 &= \frac{p_1 l_1^3 - p_2 l_2^2 (2l_1 + l_2)}{4(4l_1 + 3l_2)} \end{aligned}\right\} \quad (11).$$

$$\left.\begin{aligned} A = E &= \frac{m_1}{l_1} + \frac{1}{2} p_1 l_1 \\ C &= \frac{2}{l_2}(m_1 - m_2) + p_2 l_2 \\ B = D &= \frac{m_2}{l_2} - m_1\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) + \frac{1}{2}(p_1 l_1 + p_2 l_2) \end{aligned}\right\} \quad (12).$$

Se gli appoggi sono ad eguale distanza, e la trave è caricata egualmente in tutta la sua lunghezza, ossia quando $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$, $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p$, si ha:

$$\left.\begin{aligned} m_3 = m_1 &= -\frac{3}{28} pl^2 \\ m_2 &= -\frac{2}{28} pl^2 \end{aligned}\right\} \quad (13).$$

$$\left.\begin{aligned} A = E &= \frac{11}{28} pl \\ C &= \frac{26}{28} pl \\ B = D &= \frac{32}{28} pl \end{aligned}\right\} \quad (14),$$

da cui:

$$A + E + C + B + D = \frac{22 + 26 + 64}{28} pl = 4pl,$$

ossia la somma delle reazioni di tutti gli appoggi eguaglia il peso che gravita sopra tutta la trave.

§ 36. Rappresentazione grafica dei momenti inflettenti, e degli sforzi di scorrimento trasversale relativi alle sezioni di un solido rettilineo orizzontalmente collocato su più di due appoggi. — Sia RS (*Fig.* 33) una parte qualunque di una trave orizzontalmeute appoggiata su più di due punti. Il momento inflettente relativo ad una sezione posta a distanza x da un estremo è:

$$m = \mathrm{M} + \mathrm{N}x - \frac{1}{2}px^2 \qquad (1).$$

Dando ad x diversi valori, si troveranno i corrispondenti di m, quindi si può costrurre una linea, avente per ascisse i valori dati ad x, e per ordinate quelle corrispondenti ad y.

Questa linea rappresenta secondo qual legge variano i momenti inflettenti delle sezioni poste tra R ed S.

Riferiamo la linea ad un altro sistema di assi paralleli ai primi; chiamiamo h la distanza degli assi delle x; k quella degli assi delle y; x' ed m' le coordinate di un punto qualunque della linea di secondo ordine. Si ha:

$$x = x' + h,$$

$$m = m' + k,$$

per cui la (1) diventa

$$m' = -\frac{1}{2}px'^2 + x'(\mathrm{N} - ph) + \mathrm{N}h - \frac{1}{2}ph^2 + \mathrm{M} - k \qquad (2).$$

Ora le indeterminate possono esser scelte in modo che

$$\mathrm{N} - ph = 0,$$

$$\mathrm{N}h - \frac{1}{2}ph^2 + \mathrm{M} - k = 0,$$

quindi si ottiene:

$$h = \frac{\mathrm{N}}{p} \qquad (3),$$

$$k = \frac{N^2}{2p} + M \qquad (4),$$

$$m' = -\frac{1}{2} p x^2 \qquad (I),$$

equazione di una parabola riferita agli assi ortogonali aventi l'origine nel vertice, il quale ha le coordinate h e k date dalle equazioni (3) e (4).

Questa linea, la quale non è dipendente che dal valore del peso p passa per i punti y e z, per i quali sono nulli i valori di m, che si ottengono risolvendo l'equazione $M + Nx - \frac{1}{2} px^2 = 0$ rispetto ad x. Se il peso p ha lo stesso valore per tutta la lunghezza del solido, allora basta tagliarsi una sagoma secondo una parabola di parametro $\frac{2}{p}$ ed adattarla coll'asse normale ad RS, successivamente fra gli appoggi, in modo che passi per i punti, ai quali corrispondono valori nulli di m; se il peso uniformemente distribuito non si mantiene lo stesso per tutte le parti della trave poste tra due appoggi, allora bisogna procurarsi tante sagome paraboliche, quanti sono i detti pesi diversi.

I punti y e z separano le sezioni, che hanno i momenti inflettenti positivi, da quelle alle quali corrispondono momenti negativi, ossia i punti y e z separano la parte della linea RS che presenta la concavità verso l'alto, da quella che ha la concavità rivolta al basso.

Nella sezione di una trave, nella quale venga cimentata la resistenza alla flessione, può manifestarsi la rottura o per la compressione, o per la estensione, che ha luogo nelle parti estreme per effetto dell'incurvamento, oppure per scorrimento trasversale normalmente alla sua lunghezza per causa delle forze estrinseche verticali applicate alla trave da un estremo fino alla sezione, che si considera.

Le forze estrinseche, che cimentano lo scorrimento trasversale in una sezione qualunque G posta a distanza x da R, sono date da

$$F = P \pm px \qquad (II),$$

nella quale P è una quantità costante dipendente dalle reazioni degli appoggi posti, per es., alla sinistra di x, e dai pesi distribuiti nelle parti della trave, che si trovano alla sinistra dell'appoggio R; px è il peso distribuito in RG.

Ad ogni valore di x corrisponde uno di F, si potrà costrurre una linea avente per ascisse i valori di x, e per ordinate quelle corrispondenti di F. Questa linea è una retta, che taglia RS nel punto avente l'ascissa $x=\frac{P}{p}$.

§ 37. Applicazione al caso di una trave orizzontale appoggiata a 5 punti e caricata di un peso uniformemente distribuito nella sua lunghezza. — Sia la trave orizzontale xy appoggiata ai cinque punti A, B, C, D e E posti sopra la stessa orizzontale. Poniamo:

l_1, l_2, l_3 ed l_4 le lunghezze delle successive parti AB, BC, CD e DE della trave,

m_0, m_1, m_2, m_3 ed m_4 i momenti inflettenti relativi alle sezioni di appoggio,

p_1, p_2, p_3 e p_4 i pesi, che gravitano sopra l'unità di lunghezza di ciascuna delle dette parti,

A, B, C, D ed E le reazioni degli appoggi,

μ_1, μ_2, μ_3 ed μ_4 i momenti inflettenti, e F_1, F_2, F_3, F_4 gli sforzi di taglio relativi ad una sezione qualunque della prima, della seconda, della terza e della quarta parte della trave.

Ora il valore del momento inflettente è dato in generale da

$$\mu=M+Nx-\frac{1}{2}px^2.$$

Per la parte compresa tra gli appoggi A e B, si ha:

$$M=m_0=0,$$

$$N=\frac{1}{2}p_1l_1+\frac{m_1}{l_1},$$

perciò:

$$\mu_1=x\left(\frac{1}{2}p_1l_1+\frac{m_1}{l_1}\right)-\frac{1}{2}p_1x^2 \qquad (1).$$

Per BC si ottiene:

$$M = m_1, \qquad N = \frac{1}{2} p_2 l_2 + \frac{m_2 - m_1}{l_2},$$

$$\mu_2 = m_1 + x\left(\frac{1}{2} p_2 l_2 + \frac{m_2 - m_1}{l_2}\right) - \frac{1}{2} p_2 x^2 \qquad (2).$$

Per la terza parte CD

$$M = m_2, \qquad N = \frac{1}{2} p_3 l_3 + \frac{m_3 - m_2}{l_3},$$

$$\mu_3 = m_2 + x\left(\frac{1}{2} p_3 l_3 + \frac{m_3 - m_2}{l_3}\right) - \frac{1}{2} p_3 x^2 \qquad (3).$$

Finalmente per la quarta parte DE

$$M = m_3, \qquad N = \frac{1}{2} p_4 l_4 - \frac{m_3}{l_4},$$

$$\mu_4 = m_3 + x\left(\frac{1}{2} p_4 l_4 - \frac{m_3}{l_4}\right) - \frac{1}{2} p_4 x^2 \qquad (4).$$

Gli sforzi di taglio F_1, F_2, F_3, F_4 sono dati dalle seguenti equazioni:

$$F_1 = A - p_1 x_1 \qquad (5),$$

$$F_2 = A + B - p_1 l_1 - p_2 x \qquad (6),$$

$$F_3 = A + B + C - p_1 l_1 - p_2 l_2 - p_3 x \qquad (7),$$

$$F_4 = A + B + C + D - p_1 l_1 - p_2 l_2 - p_3 l_3 - p_4 x \qquad (8).$$

Esempio. Poniamo:

$$l_1 = l_4 = 50^m, \qquad l_2 = l_3 = 60^m,$$

$$p_1 = p_4 = 2000 \text{ chilogr.}, \quad p_2 = p_3 = 6000 \text{ chilogrammi.}$$

I momenti inflettenti relativi alle sezioni di appoggio si ottengono, ponendo per l_1, l_2, p_1, p_2 i loro valori nella (11) del § 35.

$$m_3 = m_1 = -1181579,$$

$$m_2 = -2109210.$$

Sostituendo per l_1, l_2, p_1, p_2 i loro valori, dalla (12) del § 35.

A = 26369 chilogrammi,

C = 390921 chilogrammi,

B = D = 238426 chilogrammi.

L'equazione determinatrice dei momenti inflettenti relativi alle sezioni della prima parte AB della trave, è:

$$\mu_1 = 26369\,x - 1000\,x^2.$$

Il valore di μ_1 è nullo per $x = 0$, ed $x = 26{,}37$, quindi la parabola, le cui ordinate sono proporzionali ai valori di μ_1, taglia la orizzontale AB nel punto A, ed in un punto che dista da A di $26^m{,}37$.

Per la parte BC, il momento inflettente

$$\mu_2 = -1181579 + 164540\,x - 3000\,x^2,$$

eguagliando a zero il secondo membro di questa equazione si ottiene, che la parabola dei momenti inflettenti taglia BC in due punti, che distano l'uno di $46^m{,}2$, l'altro di $8^m{,}6$ dall'estremo B.

Per la terza parte CD il momento inflettente

$$\mu_3 = -2109210 + 195293\,x - 3000\,x^2,$$

il valore di μ_3 è zero per $x = 51{,}3$, ed $x = 13{,}7$.

Finalmente per l'ultima si ottiene:

$$\mu_4 = -1181579 + 73631x - 1000\,x^2$$

La retta DE sarà tagliata dalla parabola dei momenti inflettenti in un punto posto a distanza di 23^m,7 da D e nell'estremo E.

Gli sforzi di taglio relativi alle diverse sezioni saranno date dalle seguenti equazioni:

$$F_1 = 26369 - 2000\,x,$$

$$F_2 = 164795 - 6000\,x,$$

$$F_3 = 195716 - 6000\,x,$$

$$F_4 = 74142 - 2000\,x.$$

Dalle quali equazioni si vede che:

1° F_1 ha per valore 26369 nella sezione A ed è zero nella sezione posta a distanza di 13^m,18 dall'estremo A;

2° F_2 eguaglia 164795 nella sezione B, ed è zero nella sezione posta a 27^m,465 dall'appoggio B;

3° F_3 è di 195716 in C, ed è nullo nella sezione a distanza di 32^m,61 dall'estremo C;

4° F_4 è di 74142 in D, ed è zero nella sezione posta a 37^m,07 da D.

Questi valori sono registrati nelle due tavole seguenti, secondo il modo indicato nel trattato *L'Arte del Fabbricare* del professore Curioni.

Tavola contenente i principali risultati relativi ai momenti inflettenti.

Numero d'ordine degli appoggi	Momenti inflettenti sopra gli appoggi	Numero d'ordine delle travate	Espressione generale dei momenti inflettenti in ciascuna travata	Ascisse dei punti d'inflessione	Ascisse dei centri delle sezioni di massimo momento inflettente	Massimi momenti inflettenti
1	$m_0 = 0$					
		1	$26369\,x - 1000\,x^2$	$x_1 = 0$ $x_2 = 26{,}37$	$x = 13{,}18$	173831
2	$m_1 = -1181579$					
		2	$-1181579 + 164540\,x - 3000\,x^2$	$x_1 = 8{,}6$ $x_2 = 46{,}2$	$x = 27{,}4$	1074537
3	$m_2 = -2109210$					
		3	$-2109210 + 195293\,x - 3000\,x^2$	$x_1 = 13{,}7$ $x_2 = 51{,}3$	$x = 32{,}6$	1069061
4	$m_3 = -1181579$					
		4	$-1181579 + 73631\,x - 1000\,x^2$	$x_1 = 23$ $x_2 = 50$	$x = 37{,}00$	173768
5	$m_0 = 0$					

Tavola contenente i principali risultati relativi agli sforzi di taglio.

Numero d'ordine delle travate	Espressione generale degli sforzi di taglio in ciascuna travata	Ascisse dei punti in cui gli sforzi di taglio sono nulli	Numero d'ordine degli appoggi	Reazioni degli appoggi
			1	26369
1	$26369 - 2000\,x$	$x = 13,18$		
			2	238426
2	$164795 - 6000\,x$	$x = 27,465$		
			3	390921
3	$195716 - 6000\,x$	$x = 32,6$		
			4	238426
4	$74142 - 2000\,x$	$x = 37$		
			5	26369

Mediante gli elementi, che trovansi registrati nelle tavole date, riesce della massima facilità costrurre le parabole e le rette, le cui ordinate sono proporzionali ai valori dei momenti inflettenti e degli sforzi di scorrimento trasversale relativi a tutte le sezioni. Tracciata la orizzontale uv, la quale passa per gli appoggi, in una conveniente scala si collochino gli assi degli appoggi alle distanze, che loro corrispondano, fissando così i punti A, B, C, D ed E. Fissata la scala dei momenti inflettenti, si portino sopra le perpendicolari condotte dai punti B, C e D tante unità prese sulla scala dei momenti inflettenti, quante unità sono nei numeri che danno i valori di m_1, m_2 ed m_3.

Servendosi della scala per le distanze orizzontali si portino sopra la retta uv le distanze AT_1, BT_2, BT_3, CT_4, CT_5, DT_6, i cui valori sono registrati nella 5ª linea della tabella prima, e le ascisse AS_1, BS_2, CS_3 e DS_4, i cui valori sono dati nella colonna 6ª della tabella prima, o nella 3ª della seconda, resteranno così fissati i punti di intersezione delle parabole dei momenti inflettenti colla retta uv, e le sezioni, alle quali corrispondono i massimi momenti inflettenti positivi. Si elevino per i punti S_1, S_2, S_3 ed S_4 tante perpendicolari alla uv, si prendano sopra di esse le lunghezze $S_1\omega_1$, $S_2\omega_2$, $S_3\omega_3$ ed $S_4\omega_4$ che contengono tante unità prese sulla scala dei momenti inflettenti quante ne sono nei numeri, che danno i valori di μ_{1m}, μ_{2m}, μ_{3m} e μ_{4m}, si avranno così determinate le posizioni dei vertici ω_1, ω_2, ω_3 e ω_4, quindi: per la parabola relativa alla prima travata si conoscono i punti A, ω', T' e β; per quella relativa alla seconda sono noti i punti β, T_1, ω_2, T_2 e γ; della parabola relativa alla terza travata si hanno i punti γ, T_4, ω_3, T_5 e δ; la parabola relativa all'ultima passa per i punti δ, T_6, ω_4 ed E.

Prendendo le lunghezze delle ordinate sopra la scala dei momenti inflettenti, e quelle delle ascisse sopra la scala delle distanze orizzontali si preparino due sagome paraboliche aventi l'una $\frac{1}{1000}$ per parametro, l'altra $\frac{1}{3000}$; la prima adattata sul disegno in modo, che il suo vertice coincida con ω_1 ed il suo asse sia nella direzione di $S_1\omega_1$, permette di tracciare la parabola $A\omega_1T_1\beta$; la medesima sagoma serve per tracciare la parabola $\delta T_6\omega_4E$, quando si faccia coincidere il suo vertice con ω_4, e si collochi il suo asse nella direzione di $S_4\omega_4$.

La seconda sagoma adattata sul disegno, in modo da avere il suo vertice coincidente con ω_2, ed il suo asse nella direzione di $S_2\omega_2$, permette di tracciare $\beta T_2\omega_2T_3\gamma$; non che la parabola $\gamma T_4\omega_3T_3\delta$, quando si faccia coincidere il vertice con ω_3, e l'asse con ω_3S_3.

In pratica importa solamente di conoscere il valore assoluto del momento inflettente, quindi per prendere da una sola parte dell'orizzontale *uu* tutte le ordinate, che rappresentano i momenti inflettenti si usa riportare tutte le parti di parabola, che cadono sotto, cioè: $T_1\beta$, $T_2\beta$, $T_3\gamma$, $T_4\gamma$, ecc., al disopra in $T_1\beta'$, $T_2\beta'$, $T_3\gamma'$, $T_4\gamma'$, ecc.

Per quanto spetta alle rette, le cui ordinate sono proporzionali agli sforzi di taglio, ecco come si possono tracciare sul disegno. Nelle espressioni generali degli sforzi di taglio si ponga $x = 0$, si avranno così i loro valori relativi alle varie sezioni di appoggio, si portano secondo una data scala in A*a*, B*b*, C*c* e D*d*, si tirino le rette aS_1, bS_2, cS_3 e dS_4, le quali avranno le ordinate proporzionali agli sforzi di taglio relativi alle diverse sezioni. Per prendere le ordinate relative agli scorrimenti trasversali al al disotto di *uv*, si portano le S_1b'', S_2c'', S_3d'' ed S_4e'' in S_1b', S_2c', S_3d', S_4e'.

Essendo nota la forma della sezione del solido si potrà esprimere in funzione delle sue dimensioni il momento d'inerzia T rispetto all'asse neutro, che in questo caso passa per il centro di gravità. Il valore di M corrispondente alla data sezione si può prendere sopra la figura; conoscendo la materia che costituisce il solido si potrà tenere come noto il coefficiente R. Sostituiti per M, R, T ed $\frac{1}{2}h$ i loro valori nella espressione $M = W$, si otterrà una equazione, la quale potrà determinare una delle dimensioni della sezione trasversale del solido in funzione di R, M e delle altre dimensioni.

CAPITOLO V.

RESISTENZA ALLA FLESSIONE NEI PRISMI RETTILINEI SOLLECITATI DA FORZE, LA CUI RISULTANTE È OBLIQUA ALL'ASSE.

§ 38. Equazione di stabilità per un prisma assoggettato alla flessione da forze, la cui risultante è obliqua all'asse.

Il prisma AB (*Fig.* 35), incastrato in B, sia sollecitato in A da una forza orizzontale Q, da una verticale P, e da un peso uniformemente distribuito nella sua lunghezza. L'asse rettilineo del prisma incurvatosi sotto l'azione delle forze estrinseche, prenda la posizione BDA. Siano:

x, y le coordinate del punto D,

l, f quelle del punto estremo A,

λ il massimo allungamento, che può sopportare il prisma di lunghezza $=1$ dentro i limiti d'elasticità,

Ω l'area della sezione trasversale del prisma.

Ora la somma degli allungamenti, che ciascuna unità di lunghezza delle fibre subisce sotto l'azione delle forze Q, P e pl, deve essere eguale o minore di $\lambda=\frac{R}{E}$, essendo: R la forza capace di imprimere tale allungamento, E il modulo di elasticità.

La Q diretta parallelamente all'asse rettilineo del prisma allunga l'unità di lunghezza delle fibre di

$$\frac{Q}{\Omega E} \qquad (I).$$

Il momento delle forze estrinseche rispetto al punto D, è:

$$M=\frac{ET}{\rho}=Px+Qy+\frac{1}{2}px^2,$$

ma Qy quantità piccolissima è trascurabile, perciò si ha:

$$\frac{ET}{\rho}=Px+\frac{1}{2}px^2 \qquad (II),$$

dalla quale operando in modo analogo a quello tenuto nei precedenti paragrafi, si ottiene:

$$y=\frac{1}{ET}\left\{\frac{1}{2}Px\left(l^2-\frac{1}{3}x^2\right)+\frac{px}{6}\left(l^3-\frac{1}{4}x^3\right)\right\} \qquad (III),$$

$$f=\frac{1}{ET}\left\{\frac{1}{3}Pl^3+\frac{1}{8}pl^4\right\} \qquad (IV).$$

Dall'eguaglianza $W=\frac{RT}{\frac{1}{2}h}=M$, risulta:

$$R=\frac{h}{2T}M=\frac{h}{2T}\left\{Px+\frac{1}{2}px^2\right\},$$

quindi l'allungamento causato dalle forze normali all'asse del prisma, sarà:

$$\frac{h}{2\mathrm{TE}}\left\{\mathrm{P}x+\frac{1}{2}px^2\right\} \qquad \text{(V)},$$

e per la stabilità, dovrà avere luogo l'equazione:

$$\lambda=\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{E}}=\frac{h}{2\mathrm{ET}}\left\{\mathrm{P}x+\frac{1}{2}px^2\right\}+\frac{\mathrm{Q}}{\Omega\mathrm{E}} \qquad \text{(VI)}.$$

Ponendo per x il suo massimo valore l, si ottiene:

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{E}}=\frac{h}{2\mathrm{ET}}\left\{\mathrm{P}l+\frac{1}{2}pl^2\right\}+\frac{\mathrm{Q}}{\Omega\mathrm{E}} \qquad \text{(VII)}.$$

§ 39. Equazione di stabilità per un prisma inclinato all'orizzontale, il quale incastrato nell'estremità superiore, viene sollecitato nell'altra dalle forze P e Q, e nella sua lunghezza da un peso *pl* uniformemente distribuito.

Sia α l'angolo ABC (*Fig.* 36).

Scomponiamo ciascuna delle forze P, Q, pl in due componenti, una diretta secondo l'asse del prisma, l'altra normalmente.

La risultante delle componenti parallele ad AB, è:

$$q=cd+ab-eg=\mathrm{Q}\ \mathrm{sen.}\ \alpha+\mathrm{P}\cos.\ \alpha-pl\cos.\ \alpha \qquad \text{(I)}.$$

Le componenti normali ad AB, sono:

$$\mathrm{A}c-\mathrm{A}a=\mathrm{Q}\cos.\ \alpha-\mathrm{P}\ \mathrm{sen.}\ \alpha \qquad \text{(II)},$$

$$eh=pl\ \mathrm{sen.}\ \alpha \qquad \text{(III)}.$$

Le equazioni del precedente paragrafo possono applicarsi al problema, che si sta ora studiando, quando si ponga

q invece di Q,

Q cos. α — P sen. α invece di P,

pl sen. α, a luogo di pl.

Si otterranno per la trave inclinata AB, le equazioni:

$$\frac{R}{E}=\frac{Q\ \text{sen.}\ \alpha+(P-pl)\cos.\ \alpha}{\Omega E}+\frac{h}{2ET}\left\{(Q\cos.\ \alpha-P\ \text{sen.}\ \alpha)\,l+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}p\ \text{sen.}\ \alpha\, l^2\right\} \qquad \text{(IV)},$$

$$\frac{ET}{\rho}=(Q\cos.\ \alpha-P\ \text{sen.}\ \alpha)\,x+p\ \text{sen.}\ \alpha\frac{x^2}{2} \qquad \text{(V)},$$

$$y=\frac{1}{ET}\left\{(Q\cos.\ \alpha-P\ \text{sen}\ \alpha)\left(\frac{l^2x}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+p\ \text{sen.}\ \alpha\left(\frac{l^3x}{6}-\frac{x^4}{24}\right)\right\} \qquad \text{(VI)},$$

$$f=\frac{1}{ET}\left\{(Q\cos.\ \alpha-P\ \text{sen.}\ \alpha)\frac{l^3}{3}+p\ \text{sen.}\ \alpha\frac{l^4}{8}\right\} \qquad \text{(VII)}.$$

Nel caso in cui $p=0$, si ha:

$$\frac{R}{E}=\frac{Q\ \text{sen.}\ \alpha+P\cos.\ \alpha}{\Omega E}+\frac{hl}{2ET}(Q\cos.\ \alpha-P\ \text{sen.}\ \alpha) \qquad \text{(VIII)};$$

$$f=\frac{1}{ET}(Q\cos.\ \alpha-P\ \text{sen.}\ \alpha)\frac{l^3}{3} \qquad \text{(IX)}.$$

§ 40. Equazione di stabilità per nn prisma inclinato, che incastrato ad nna estremità ed appoggiato nell'altra sopra un piano orizzontale, è sollecitato da nn peso uniformemente distribuito nella sna Innghezza.

L'appoggio in A (*Fig.* 36) può essere sostituito dalla reazione verticale P e dalla spinta orizzontale Q che tende a fare strisciare l'estremità A sopra il piano di appoggio.

La forza verticale $P=pl$; la orizzontale Q è data dalla (VII) del § precedente, nella quale si ponga $f=0$ e $P=pl$, quindi:

$$0=(Q\cos.\ \alpha-pl\ \text{sen.}\ \alpha)\frac{l^3}{3}+pl\ \text{sen.}\ \alpha\frac{l^3}{8},$$

da cui:

$$Q=\frac{5}{8}pl\ \text{tang.}\ \alpha \qquad \text{(I)}.$$

Ponendo nella (IV) del § 39, per Q e P i loro valori, si ha l'equazione di stabilità

$$\frac{R}{E}=\frac{pl\ \text{sen.}\ \alpha}{E}\left\{\frac{5}{8}\frac{\text{tang.}\ \alpha}{\Omega}+\frac{h}{2T}\frac{l}{8}\right\} \qquad \text{(II)},$$

da cui:

$$R\Omega=\frac{1}{8}pl\ \text{sen.}\ \alpha\left\{5\ \text{tang.}\ \alpha+\frac{h\Omega}{2T}\,l\right\} \qquad \text{(III)}.$$

Due solidi prismatici AB, BD di lunghezza l (*Fig.* 37), posti nello stesso piano verticale, ed appoggiantisi colle loro estremità inferiori sopra un piano orizzontale, siano sollecitati da un peso P applicato nel loro vertice comune B.

Sia α l'angolo $ABP = DBP$. L'appoggio in A, come quello in D può essere tolto, quando si applicano in A come in D, e la reazione verticale $V=\frac{1}{2}P$ e la spinta orizzontale Q.

Il valore di Q è dato dalla (IX) del § 39, nella quale si ponga $f=0$, ed $\frac{1}{2}P$ invece di P, così si ha:

$$0=\frac{1}{ET}\left\{Q\cos.\ \alpha-\frac{1}{2}P\ \text{sen.}\ \alpha\right\}\frac{l^3}{3},$$

da cui:

$$Q=\frac{1}{2}P\ \text{tang.}\ \alpha \qquad \text{(IV)}.$$

Ponendo nella (VIII) del § precedente per Q e P i loro valori, si ottiene:

$$\frac{R}{E}=\frac{P}{2\Omega E\cos.\ \alpha} \qquad \text{(V)},$$

da cui:

$$R\Omega=\frac{P}{2\cos.\ \alpha} \qquad \text{(VI)},$$

in questo caso il prisma è soltanto compresso da una forza, la cui direzione coincide col suo asse.

§ 41. Equazione di stabilità per una trave inclinata, la quale caricata di un peso uniformemente distribuito nella sua lunghezza, appoggia nelle sue estremità sopra sostegni, i quali si oppongono ad ogni loro spostamento sia orizzontale che verticale degli estremi.

Siano:

X ed Y le lunghezze BC ed AC (*Fig.* 38),

α l'angolo di AB colla verticale,

l la lunghezza della trave,

p il peso sopportato dall'unità di lunghezza della trave,

Ω l'area della sezione trasversale di AB.

Il peso pl si può supporre applicato nel punto di mezzo D, la sua componente $pl \cos. \alpha$ è parallela all'asse del prisma, pl sen. α invece è diretta normalmente ad AB.

Gli appoggi A e B possono essere sostituiti dalle loro reazioni.

Ora in A agisce la forza $N = \frac{1}{2} pl \text{ sen. } \alpha$ diretta normalmente ad AB, la quale ha la componente verticale V', e la orizzontale Q, date dalle seguenti equazioni:

$$V' = N \text{ sen. } \alpha = \frac{1}{2} pl \text{ sen.}^2 \alpha \qquad \text{(I)},$$

$$Q' = N \cos. \alpha = \frac{1}{2} pl \text{ sen. } \alpha - \cos. \alpha = \frac{1}{4} pl \text{ sen. } 2\alpha \qquad \text{(II)}.$$

In B sono applicate le forze

$$N = \frac{1}{2} pl \text{ sen } \alpha, \qquad T = pl \cos. \alpha.$$

La componente verticale della reazione di B, è:

$$V = N \text{ sen. } \alpha + T \cos. \alpha = \frac{1}{2} pl\,(1 + \cos.^2 \alpha) \qquad \text{(III)},$$

la orizzontale è:

$$Q = T \text{ sen. } \alpha - N \cos. \alpha = \frac{1}{4} pl \text{ sen. } 2\alpha \qquad \text{(IV)}.$$

Dalle (I) e (III), si vede che:

$$V + V' = pl.$$

Dalle (II) e (IV) si riconosce che $Q = Q'$, ossia la spinta orizzontale della trave è costante in tutti i punti.

Il momento statico delle forze estrinseche, rispetto alla sezione T posta a distanza x da A, è:

$$M_x = x.N - \frac{1}{2} x . px \text{ sen. } \alpha = \frac{1}{2} px (l - x) \text{ sen. } \alpha.$$

La componente di px diretta parallelamente all'asse del prisma, è:

$$T_x = px \cos. \alpha.$$

Dalla (VI) del § 38, si ha l'equazione di stabilità:

$$\frac{R}{E} = \frac{T_x}{\Omega E} + \frac{h}{2ET} M_x,$$

da cui:

$$\Omega = \frac{1}{R} \left\{ T_x + \frac{h\Omega}{2T} M_x \right\} \qquad (V).$$

Ponendo per T_x ed M_x i loro valori, si ha:

$$\Omega = \frac{1}{R} \left\{ pl \cos. \alpha + \frac{h\Omega}{2T} \; \frac{1}{2} px \; (l - x) \text{ sen. } \alpha \right\} \qquad (VI).$$

La sezione di mezzo, che è la più pericolosa, avrà l'area

$$\Omega = \frac{pl}{2R} \left\{ \cos. \alpha + \frac{1}{8} \; \frac{h\Omega}{T} \; l \text{ sen. } \alpha \right\} \qquad (VII).$$

Ora

$$\text{sen. } \alpha = \frac{X}{l}, \quad \cos. \alpha = \frac{Y}{l},$$

perciò:

$$\Omega = \frac{1}{2R} \left\{ pY + \frac{1}{8} \frac{h\Omega l}{T} pX \right\} \qquad \text{(VIII).}$$

Ponendo per il momento d'inerzia T il suo valore, si ha:

a) per sezione rettangolare di base *b*, di altezza *h*:

$$bh^2 = \frac{p}{R} \left\{ \frac{1}{2} Xh + \frac{3}{4} lX \right\} \qquad \text{(IX),}$$

b) per sezione circolare di raggio *r*:

$$\pi r^2 = \frac{p}{R} \left\{ \frac{1}{2} Yh + \frac{lX}{2r} \right\} \qquad \text{(X),}$$

c) per sezione a doppio T:

$$\Omega = \frac{p}{R} \left\{ \frac{1}{2} Y + \frac{1}{4} \frac{h}{Z^2} lX \right\} \qquad \text{(XI),}$$

essendo Z la distanza dei centri di gravità alle due tavole.

§ 42. **Eqnazione di stabilità per una trave inclinata, la quale, caricata di un peso uniformemente distribuito nella sua lunghezza, e di una forza verticale applicata in un punto qualunque, appoggia nell'estremità superiore ad una parete verticale, ed è connessa nell'altra ad una trave orizzontale.**

Sia la trave AB (*Fig.* 39) appoggiata alla parete verticale AC, connessa in B alla trave GC, caricata di un peso *pl* uniformemente distribuito in *l*, e di P applicato in un punto posto a distanza *d* dall'estremo A.

La parete verticale sviluppa in A una reazione orizzontale Q', e l'appoggio B le forze V e Q.

Per l'equilibrio la somma e delle forze orizzontali e delle verticali che cimentauo AB deve essere zero, la somma dei momenti di dette forze rispetto al punto B deve eguagliare zero, quindi:

$$Q - Q' = 0,$$

$$V - pl - P = 0,$$

$$Q'l \cos. \alpha - Pd \operatorname{sen}. \alpha - \frac{1}{2} pl^2 \operatorname{sen}. \alpha = 0,$$

dalle quali:

$$Q' = Q = \frac{(2Pd + pl^2) \operatorname{tang}. \alpha}{2l} \qquad (I),$$

$$V = P + pl \qquad (II).$$

Quando P è applicato nel punto di mezzo di AB, allora:

$$d = \frac{1}{2} l$$

$$Q' = Q = \frac{1}{2} (P + pl) \operatorname{tang}. \alpha \qquad (III).$$

Per $d = l$:

$$Q' = Q = (P + \frac{1}{2} pl) \operatorname{tang}. \alpha \qquad (IV).$$

La direzione di P coincide con quella di pl risultante del peso uniformemente distribuito, quando il suo punto di applicazione sia quello di mezzo di AB, in tale caso conducendo da A una orizzontale AF, e da D la verticale DF, la retta DEI, che unisce B con l'incontro di AF con DF segna la direzione della risultante di V e Q.

Poniamo $P = 0$, allora:

$$Q = Q' = \frac{1}{2} pl \operatorname{tang}. \alpha \qquad (V),$$

$$V = pl \qquad (VI).$$

Scomponiamo la Q in due, una normale N, l'altra t parallela all'asse del puntone, si ottiene:

$$N = Q \cos. \alpha = \frac{1}{2} pl \operatorname{sen}. \alpha \qquad (VII).$$

$$t = Q \text{ sen. } \alpha = \frac{1}{2} pl \text{ tang. } \alpha \text{ sen. } \alpha \qquad \text{(VIII)}.$$

Il peso px distribuito sopra il tratto di puntone di lunghezza x, ha le componenti:

$$n = px \text{ sen. } \alpha,$$

$$t' = px \cos. \alpha.$$

Rispetto alla sezione posta a distanza x dall'estremo A, si ha:

$$M_x = \frac{x}{2} pl \text{ sen. } \alpha - px \text{ sen. } \alpha \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} px \text{ sen. } \alpha (l - x) \text{ (IX)},$$

$$T_x = t + t' = \frac{1}{2} pl \text{ tang. } \alpha \text{ sen. } \alpha + px \cos. \alpha =$$

$$= \frac{p}{2 \cos. \alpha} \left\{ l \text{ sen.}^2 \alpha + 2x \cos.^2 \alpha \right\} \qquad \text{(X)}.$$

Dalla (V) del precedente paragrafo si ottiene la sua sezione trasversale

$$\Omega = \frac{1}{R} \left\{ T_x + \frac{h\Omega}{2T} M_x \right\}.$$

Ponendo per T_x e M_x i loro valori, si ottiene:

$$\Omega = \frac{1}{R} \left\{ \frac{p}{2 \cos. \alpha} (l \text{ sen.}^2 \alpha + 2x \cos.^2 \alpha) + \frac{h\Omega}{2T} \frac{1}{2} px \text{ sen. } \alpha (l - x) \right\} \qquad \text{(XI)},$$

per $x = \frac{1}{2} l$, si ha:

$$\Omega = \frac{1}{R} \left\{ \frac{pl}{2 \cos. \alpha} + \frac{h\Omega}{2T} \frac{1}{8} pl^2 \text{ sen. } \alpha \right\} \qquad \text{(XII)}.$$

La sezione avente l'ascissa $x = 0$, ha l'area:

$$\Omega' = \frac{pl \text{ tang. } \alpha \text{ sen. } \alpha}{2R} = \frac{pl \text{ sen.}^2 \alpha}{2R \cos. \alpha} \qquad \text{(XIII)}.$$

L'area di B avente l'ascissa $x = l$, è:

$$\Omega'' = \frac{pl\,(1 + \cos.^2 \alpha)}{2R \cos. \alpha} \qquad \text{(XIV)}.$$

Ponendo per il momento d'inerzia T il suo valore, si ottiene:
a) per sezione rettangolare di base b e di altezza h:

$$\left.\begin{aligned} bh^2 &= \frac{pl}{R}\left\{\frac{h}{2\cos.\alpha} + \frac{3}{4}\, l \text{ sen. } \alpha\right\} \\ bh^2 &= \frac{pl}{R}\left\{\frac{hl}{2Y} + \frac{3}{4}\, X\right\} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XV)},$$

b) per sezione circolare di raggio r:

$$\pi r^2 = \frac{pl}{R}\left\{\frac{l}{2Y} + \frac{l}{2r}\, X\right\} \qquad \text{(XVI)},$$

c) per sezione a doppio T:

$$\Omega = \frac{pl}{R}\left\{\frac{l}{2Y} + \frac{h}{4Z^2}\, X\right\} \qquad \text{(XVII)},$$

esprimendo con h l'altezza di tutta la sezione, con Z la distanza dei centri di gravità delle due tavole.

Nel caso in cui $p = 0$ e P è applicato nell'estremo A, si ha dalle (II) e (IV):

$$V = P \qquad \text{(XVIII)},$$

$$Q = Q' = P \text{ tang. } \alpha \qquad \text{(XIX)},$$

e nella trave AB viene cimentata la resistenza alla compress ione dalla forza

$$T = \frac{P}{\cos.\ \alpha} \qquad \text{(XX).}$$

Esempio 1. Trovare quale peso può distribuirsi sopra ogni metro lineare di un puntone in legno di sezione rettangolare di base $b = 0^m,12$, di altezza $h = 0^m,20$, il quale inclinato all'orizzontale di circa 31°, appoggia nella estremità superiore ad una parete verticale, ed è connesso stabilmente nella inferiore ad una trave orizzontale.

I dati del nostro problema, sono:

$$X = 5^m, \quad Y = 3^m;$$

$$b = 0{,}12, \quad h = 0{,}20, \quad R = 1500000 \text{ chilogrammi per m.q.},$$

$$l = \sqrt{3^2 + 5^2} = 5{,}83.$$

Ponendo tali valori nella (XV), si ha:

$$0{,}12.020^2 = \frac{p.5{,}83}{1500000} \left\{ \frac{0{,}20.\ 5{,}83}{2.3} + \frac{3}{4} 5 \right\},$$

da cui

$$p = 320 \text{ chilogrammi},$$

ossia la trave potrà sopportare per ogni metro della sua lunghezza un peso di 320 chilogrammi.

Il puntone poi esercita contro il muro e contro il sostegno una spinta orizzontale

$$Q = Q' = \frac{1}{2} pl \text{ tang. } \alpha = \frac{1}{2} 320.5{,}83.0{,}6 = 559{,}68,$$

ed una pressione verticale

$$V = pl = 320.5{,}83 = 1865{,}60 \text{ chilogrammi.}$$

CAPITOLO VI.

DEI PRISMI INIZIALMENTE CURVI.

§ 43. Equazione generale di stabilità.

Siano *ab* ed *a'b'* due sezioni infinitamente vicine di un prisma inizialmente curvo, 0 ed 0' i loro centri, ed M sia la loro intersezione (*Fig.* 40).

Dopo la flessione la sezione *a'b'* prende la posizione *ed*, e sia N la intersezione delle sezioni *ab*, *ed*. Poniamo:

$l = 00'$ lunghezza della fibra neutra,
$\rho = 0M = 0'M$ raggio di curvatura di 00' prima della flessione,
$l' = nk$ lunghezza della fibra *nk*,
$z = 0n = 0'k$ distanza della fibra *nm* dall'asse,
$\rho + z = nM = kM$ raggio di curvatura dell'archetto *nk*.

Per la similitudine dei triangoli 0M0', *nMk*, si ha la proporzione:

$$\rho : \rho + z = l : l',$$

da cui:

$$l' = l + \frac{z}{\rho}\, l \qquad (1),$$

Ora se λ è il prolungamento *km* della fibra *nk*,
$\rho' = 0N = 0'M$ raggio di curvatura di 00' dopo la flessione,
$l' + \lambda = nm = nk + km$ lunghezza della fibra *nm*,
$\rho' + z = nN = mN =$ raggio di curvatura di *nm*.

Per la similitudine dei triangoli 0N0', *nNm*, si ottiene:

$$\rho' : \rho' + z = l' : l' + \lambda,$$

da cui:

$$l' + \lambda = l + \frac{z}{\rho'}\, l \qquad (2).$$

Sottraendo la (2) da (1), si ha:

$$\lambda = lz \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) \qquad (I).$$

L'allungamento, che subisce una fibra inizialmente rettilinea incurvata secondo un archetto di raggio ρ è $lz\frac{1}{\rho}$, quindi le equazioni stabilite per i prismi ad asse rettilineo potranno applicarsi a quelli inizialmente curvi, quando si ponga $\frac{1}{\rho'}-\frac{1}{\rho}$ invece di $\frac{1}{\rho}$.

La forza atta a produrre l'allungamento λ nella fibra di sezione ω posta a distanza z dall'asse neutro, sarà:

$$p=\frac{E}{l}\,\omega\left[lz\left(\frac{1}{\rho'}-\frac{1}{\rho}\right)\right] \qquad \text{(II).}$$

Il momento di resistenza di tutta la sezione verrà dato da

$$W=ET\left(\frac{1}{\rho'}-\frac{1}{\rho}\right) \qquad \text{(III),}$$

dove T è il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse 0.

§ 44. Linea secondo la quale si dispone l'asse di un prisma inizialmente curvo, il quale incastrato ad una estremità è sollecitato nell'altra da una forza verticale e da una orizzontale e nella sua lunghezza da un peso uniformemente distribuito sopra la sua proiezione orizzontale.

Sia AEB la posizione dell'asse del prisma dopo la flessione subita dall'azione delle forze estrinseche (*Fig.* 41). Siano:

AZ, AW gli assi coordinati,

X, Y le coordinate del punto T,

x, y quelle di D.

Il momento delle forze estrinseche applicate in DT rispetto alla sezione D, è dato da:

$$M=P.TJ+Q.JD+\frac{1}{2}p.TJ^2=P\,(X-x)+Q\,(Y-y)+$$

$$+\frac{1}{2}p\,(X-x)^2 \qquad \text{(1).}$$

Per l'equilibrio deve avere luogo l'eguaglianza M = W, quindi:

$$ET\left(\frac{1}{\rho'}-\frac{1}{\rho}\right)=P(X-x)+Q(Y-y)+\frac{1}{2}p(X-x)^2 \qquad (I).$$

L'elemento DF di linea per la flessione si è portato in EG. Siano β, β', φ, φ' gli archi di raggio = 1, che misurano gli angoli delle tangenti nei punti D, F, E, G coll'orizzontale AZ. Il raggio di curvatura $\rho'=\frac{d}{\varphi'-\varphi}$, e $\rho=\frac{d}{\beta'-\beta}$, quindi:

$$\frac{1}{\rho'}-\frac{1}{\rho}=\frac{\varphi'-\varphi}{d}-\frac{\beta'-\beta}{d} \qquad (2),$$

ponendo tale valore in (I), si ha:

$$(\varphi'-\varphi)-(\beta'-\beta)=\frac{d}{ET}\left\{P(X-x)+Q(Y-y)+\frac{1}{2}p(X-x)^2\right\} \qquad (II).$$

Consideriamo l'arco di parabola ADT avente il vertice A, e l'asse AW.

Sia δ la differenza delle ascisse dei punti DF, ed h quella delle loro ordinate, essendo d la lunghezza dell'arco DF, si ottiene:

$$d=\frac{\delta}{\cos.\beta} \qquad (3),$$

$$h=\delta \text{ tang. } \beta \qquad (4).$$

L'equazione della parabola AT riferita agli assi AZ, AW, è:

$$x^2=\frac{X^2}{Y}y,$$

(Nota IV).

la tangente trigonometrica dell'angolo della tangente coll'asse x, ossia tang. $\beta=\frac{2y}{x}$, quindi si ottiene:

$$y=\frac{Y}{X^2}x^2 \qquad (5),$$

$$\text{tang.}\,\beta = \frac{2Yx}{X^2} \tag{6}$$

$$\text{sen.}\,\beta = \frac{2Yx}{\sqrt{\{X^4 + 4Y^2x^2\}}} \tag{7}$$

$$\cos.\,\beta = \frac{X^2}{\sqrt{\{X^4 + 4Y^2x^2\}}} \tag{8}$$

Ponendo per cos. β e tang. β i loro valori nelle (3) e (4), si ha:

$$d = \frac{\delta}{X^2}\sqrt{\{X^4 + 4Y^2x^2\}} = \delta\left\{1 + \frac{2Y^2x^2}{X^4} - \frac{2Y^4x^4}{X^8} + \frac{4Y^6x^6}{X^{12}} - \ldots\right\} \tag{9}$$

$$h = \delta\,\frac{2Yx}{X^2} \tag{10}$$

Ponendo nella (II) per y e d i valori (5) e (9), si ha:

$$(\varphi' - \varphi) - (\beta' - \beta) = \frac{1}{ET}\left\{P\delta\left(X - x + \frac{2Y^2x^2}{X^3} - \frac{2Y^2x^3}{X^4} + \ldots\right)\right.$$

$$+ Q\delta\left(Y - \frac{Y}{X^2}x^2 + \frac{2Y^3x^2}{X^4} - \frac{2Y^3x^4}{X^6} + \ldots\right)$$

$$\left. + p\delta\left(\frac{X^2}{2} - Xx + \frac{x^2}{2} + \frac{Y^2x^2}{X^2} - \frac{2Y^2x^3}{X^3} + \ldots\right)\right\} \tag{III}$$

Si divida l'ascissa AD″ in un numero n grandissimo di parti eguali, di lunghezza costante $Aa_1 = a_1a_2 = a_2a_3 = \ldots = \delta$.

Si conducano le ordinate a_1c_1, a_2c_2, ... e le linee c_1e_1, c_2e_2,... in modo da essere $Ac_1 = Ae_1$, $c_1c_2 = e_1e_2$ ... Siano:

β_1, β_2, β_3,... gli archi di raggio = 1, che misurano gli angoli delle tangenti nei punti A, c_1, c_2, ... D della linea colla tangente AZ,

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots$ gli archi di raggio$=1$, che misurano gli angoli dalle tangenti nei punti A, e_1, e_2, . . . E della linea AE con AZ.

Ponendo nella (III) per x successivamente i valori $1\delta, 2\delta, 3\delta \ldots$, per β e φ i corrispondenti valori, si ottiene:

$$(\varphi_2-\varphi_1)-(\beta_2-\beta_1)=\frac{1}{\mathrm{ET}}\left\{P\delta\left(X-\delta+\frac{2Y^2(1\delta)^2}{X^3}-\ldots\right)+\right.$$

$$\left.+Q\delta\left(Y-\frac{Y}{X^2}\delta^2+\ldots\right)+p\delta\left(\frac{X^2}{2}-X\delta+\ldots\right)\right\},$$

$$(\varphi_3-\varphi_2)-(\beta_3-\beta_2)=\frac{1}{\mathrm{ET}}\left\{P\delta\left(X-2\delta+\frac{2Y^2(2\delta)^2}{X^3}-\ldots\right)+\right.$$

$$\left.+Q\delta\left(Y-\frac{Y}{X^2}(2\delta)^2+\ldots\right)+p\delta\left(\frac{X^2}{2}-X(2\delta)+\ldots\right)\right\},$$

. . . .

$$(\varphi_n-\varphi_{n-1})-(\beta_n-\beta_{n-1})=\frac{1}{\mathrm{ET}}\left\{P\delta\left(X-n\delta+\frac{2Y^2(n\delta)^2}{X^3}-\ldots\right)+\right.$$

$$\left.+Q\delta\left(Y-\frac{Y}{X^2}(n\delta)^2+\ldots\right)+p\delta\left(\frac{X^2}{2}-X(n\delta)+\ldots\right)\right\}.$$

Sommando i primi ed i secondi membri di queste equazioni, essendo $\varphi_1=0$, $\beta_1=0$ e ponendo φ e β a luogo di φ_n e β_n, si avrà:

$$\varphi-\beta=\frac{1}{\mathrm{ET}}\left\{P\left[Xx-\frac{x^2}{2}+\frac{2Y^2x^3}{3X^3}-\ldots\right]+Q\left[Yx-\frac{Yx^3}{3X^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2Y^3x^3}{3X^4}-\ldots\right]+p\left[\frac{X^2x}{2}-\frac{Xx^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{Y^2x^3}{3X^2}-\ldots\right]\right\}=S$$

(IV).

Tirisi da D' una retta D'N parallela ad EE', l'angolo

$$ND'D = \gamma = \varphi - \beta.$$

Essendo tale angolo piccolissimo, si potrà porre:

$$\cos.\ \gamma = 1, \qquad \text{sen.}\ \gamma = \gamma.$$

Ora $\varphi = \beta + \gamma$, perciò:

$$\cos.\ \varphi = \cos.\ \beta - (\varphi - \beta)\ \text{sen.}\ \beta,$$

$$\text{sen.}\ \varphi = \text{sen.}\ \beta + (\varphi - \beta)\ \cos.\ \beta,$$

quindi:

$$\cos.\ \varphi - \cos.\ \beta = -(\varphi - \beta)\ \text{sen.}\ \beta \qquad \text{(A)},$$

$$\text{sen.}\ \varphi - \text{sen.}\ \beta = (\varphi + \beta)\ \cos.\ \beta \qquad \text{(B)}.$$

Ponendo $\cos.\ \varphi = \frac{EM}{d} = \frac{\delta'}{d}$, $\text{sen.}\ \varphi = \frac{h'}{d}$, $\cos.\ \beta = \frac{\delta}{d}$, $\text{sen.}\ \beta = \frac{h}{d}$ nelle (A) e (B), si ottiene:

$$\frac{\delta' - \delta}{d} = -\frac{h}{d}(\varphi - \beta),$$

da cui:

$$\delta' - \delta = -h\,(\varphi - \beta) \qquad \text{(C)},$$

$$\frac{h' - h}{d} = \frac{\delta}{d}(\varphi - \beta),$$

da cui:

$$h' - h = \delta\,(\varphi - \beta) \qquad \text{(D)}.$$

Ponendo per $\varphi - \beta$ il valore S dato da (IV), si ha:

$$\delta' - \delta = -h\text{S} \qquad \text{(V)},$$

$$h' - h = \delta\text{S} \qquad \text{(VI)}.$$

Si immagini l'ascissa AD″ = HD = x divisa in un numero grandissimo di parti eguali a δ, si tirino le ordinate di tutti i punti, che si trovano a distanza 1δ, 2δ, 3δ . . . dal punto A.

Ponendo nella (V) per h il suo valore (10) e per x successivamente 1δ, 2δ, 3δ . . . nδ, si otterranno le seguenti equazioni:

$$\delta'_1 - \delta_1 = - \frac{2Y\delta}{ETX^2}(1\delta)\Big[P\,[X\delta - \frac{(1\delta)^2}{2} + \frac{2Y^2(1\delta)^3}{3X^3} - \dots] +$$

$$+ Q\,[Y\delta - \frac{Y(1\delta)^3}{3X^2} + \dots] + p\,[\frac{X^2\delta}{2} - \frac{X(1\delta)^2}{2} + \dots]\Big],$$

$$\delta'_2 - \delta_2 = - \frac{2Y\delta}{ETX^2}(2\delta)\Big[P\,[X(2\delta) - \frac{(2\delta)^2}{2} + \frac{2Y^2(2\delta)^3}{3X^3} - \dots +$$

$$+ Q\,[Y(2\delta) - \frac{Y(2\delta)^3}{3X^2} + \dots] + p\,[\frac{X^2(2\delta)}{2} - \frac{X(2\delta)^2}{2} + \dots]\Big].$$

. . . .

$$\delta'_n - \delta_n = - \frac{2Y\delta}{ETX^2}(n\delta)\Big[P\,[X(n\delta) - \frac{(n\delta)^2}{2} + \frac{2Y^2(n\delta)^3}{3X^3} - \dots] +$$

$$+ Q\,[Y(n\delta) - \frac{Y(n\delta)^3}{3X^2} + \dots \quad + p\,[\frac{X^2(n\delta)}{2} - \frac{X(n\delta)^2}{2} + \dots]\Big].$$

La somma dei primi membri, è:

$$n\delta' - n\delta = x' - x.$$

quindi:

$$x' - x = - \frac{1}{ET}\Big\{ P\,[\frac{2Yx^3}{3X} - \frac{Yx^4}{4X^2} + \frac{4Y^3x^5}{15X^5} - \dots] +$$

$$+ Q\,[\frac{2Y^2x^3}{3X^2} - \frac{2Y^2x^5}{15X^4} + \dots] + p\,[\frac{Yx^3}{3} - \frac{Yx^4}{4X} + \frac{Yx^5}{15X^2} +$$

$$+ \frac{2Y^3x^5}{15X^4} + \dots]\Big\} \qquad \text{(VII).}$$

Ponendo nella (VI) successivamente per x i valori 1δ, 2δ, 3δ, sommando tutti i risultati parziali, si avrà la somma dei primi membri eguale ad $y'-y$; quindi:

$$y'-y=\frac{1}{ET}\Big\{P\Big[\frac{Xx^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{Y^2x^4}{6X^3}-\frac{Y^2x^5}{10X^4}-\ldots\Big]+$$

$$+Q\Big[\frac{Yx^2}{2}-\frac{Yx^4}{12X^2}+\frac{Y^3x^4}{6X^4}-\frac{Y^3x^6}{15X^6}+\ldots\Big]+$$

$$+p\Big[\frac{X^2x^2}{4}-\frac{Xx^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{Y^2x^4}{12X^2}-\frac{Y^2x^5}{10X^3}+\frac{Y^2x^6}{30X^4}-\ldots\Big]\Big\}\text{(VIII)}.$$

Si conducano per i punti T, B delle linee AT ed AB la verticale TS e la orizzontale BS, pongasi $f=TS$ spostamento verticale ed $h=SB$ spostamento orizzontale del punto estremo T.

Il punto estremo T ha l'ascissa $x=X$, l'ordinata $y=Y$, quindi dalle (VII) e (VIII), si ha:

$$h=-\frac{1}{ET}\Big\{P\Big[\frac{5X^2Y}{12}+\frac{Y^3}{10}-\ldots\Big]+Q\Big[\frac{8XY^2}{15}+\frac{16Y^4}{105X}-\ldots\Big]+$$

$$+p\Big[\frac{3X^3Y}{20}+\frac{XY^3}{42}+\ldots\Big]\Big\} \qquad \text{(IX)},$$

$$f=\frac{1}{ET}\Big\{P\Big[\frac{X^3}{3}+\frac{XY^2}{15}-\ldots\Big]+Q\Big[\frac{5X^2Y}{12}+\frac{Y^3}{10}-\ldots\Big]+$$

$$+p\Big[\frac{X^4}{8}+\frac{X^2Y^2}{60}+\ldots\Big]\Big\} \qquad \text{(X)}.$$

Per trovare la tensione che cimenta l'arco in un punto qualunque D, si immaginano trasportate parallelamente a sè stesse fino in D le forze, che sollecitano l'arco TD, ossia le verticali P, $p(X-x)$ e la orizzontale Q; si scomponga ciascuna di queste

in due, una tangente, e l'altra normale alla linea. La somma delle componenti tangenziali, è:

$$T_x = Q \cos. \beta - [P + p(X - x)] \text{ sen. } \beta,$$

ponendo per cos. β e sen. β i loro valori, si ottiene:

$$T_x = \frac{QX^2 - [P + p(X - x)]\, 2Yx}{\sqrt{\{X^4 + 4Y^2x^2\}}} \qquad \text{(XI)}.$$

§ 45. Applicazione delle formule trovate nel precedente paragrafo al caso di un arco di parabola, il quale incastrato nel suo vertice, viene sollecitato nel suo estremo da una forza verticale diretta verso l'alto, da una orizzontale diretta verso la sezione d'incastro, nella sua lunghezza da un peso uniformemente distribuito sopra la sua proiezione orizzontale.

La linea AB sia un arco di parabola avente il vertice A e l'asse AC (*Fig.* 42). Il prisma curvilineo incastrato nell'estremità A, sia sollecitato in B dalla forza Q orizzontalmente diretta verso BC, e dalla verticale P diretta verso l'alto, e nella sua lunghezza da un peso pX uniformemente distribuito nella sua proiezione orizzontale X.

I valori dello spostamento orizzontale h, di quello verticale f, della tensione tangenziale T_x al punto D della linea, sono dati dalle (IX), (X) e (XI) del precedente paragrafo, quando si ponga $-P$ invece di P.

Si ottiene dunque con approssimazione:

$$h = \frac{1}{ET}\left[P\left(\frac{5X^2Y}{12} + \frac{Y^3}{10}\right) - Q\left(\frac{8XY^2}{15} + \frac{16Y^4}{105X}\right) - \right.$$

$$\left. - p\left(\frac{3X^2Y}{20} + \frac{XY^3}{42}\right)\right] \qquad \text{(I)},$$

$$f = \frac{1}{ET}\left[-P\left(\frac{X^3}{3} + \frac{XY^2}{15}\right) + Q\left(\frac{5X^2Y}{12} + \frac{Y^3}{10}\right) + \right.$$

$$\left. + p\left(\frac{X^4}{8} + \frac{X^2Y^2}{60}\right)\right] \qquad \text{(II)},$$

$$T_x = \frac{QX^2 + [P - p(X - x)]\,2Yx}{\sqrt{\{X^4 + 4Y^2x^2\}}} \qquad \text{(III)}.$$

Se la forza Q ha tale intensità da opporsi ad ogni spostamento orizzontale, allora $h = 0$, dalla (I) si ottiene:

$$Q = \frac{1}{\frac{8XY^2}{15} + \frac{16Y^4}{105X}} \left[P\left(\frac{5X^2Y}{12} + \frac{Y^3}{10}\right) - p\left(\frac{3X^3Y}{20} + \frac{XY^3}{42}\right)\right].$$

Se Y è molto piccolo rispetto ad X, si potrà con grande approssimazione porre:

$$Q = P\left(\frac{25X}{32Y} - \frac{Y}{28X}\right) - p\left(\frac{9X^2}{32Y} - \frac{Y}{28}\right) \qquad \text{(IV)}.$$

§ 46. Equazioni determinatrici delle reazioni degli appoggi, dell'abbassamento verticale del vertice, dello spostamento orizzontale delle sezioni estreme e degli sforzi, che sollecitano le diverse sezioni di un arco parabolico, il quale appoggia alle due estremità sopra un piano orizzontale, ed è sollecitato nel vertice da una forza verticale e nella sua lunghezza da un peso uniformemente distribuito nella sua proiezione orizzontale. — La parabola BAD (*Fig.* 43), sia l'asse di un prisma appoggiato alle estremità B e D, e sollecitato nel vertice A da un peso P e nella sua lunghezza da un peso uniformemente distribuito nella sua proiezione orizzontale. Sotto l'azione di tali forze il vertice A si abbassa di Aa e gli estremi B e D subiscono lo spostamento orizzontale Bb = Dd.

L'appoggio B e quello D svilupperanno la reazione verticale $\frac{1}{2}P + pX$.

I valori e dello spostamento orizzontale h dei punti B D e del verticale f di A e di T_x, sono dati dalle (I), (II) e (III), del paragrafo precedente, quando si ponga $\frac{1}{2}P + px$ a luogo di P, e $Q = 0$. Si ottiene così approssimativamente:

$$h=\frac{1}{\mathrm{ET}}\left\{\left(\frac{1}{2}\mathrm{P}+p\mathrm{X}\right)\left(\frac{5\mathrm{X}^2\mathrm{Y}}{12}+\frac{\mathrm{Y}^3}{10}\right)+p\left(\frac{3\mathrm{X}^3\mathrm{Y}}{20}+\frac{\mathrm{XY}^3}{42}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{ET}}\left\{\frac{1}{2}\mathrm{P}\left(\frac{5\mathrm{X}^2\mathrm{Y}}{12}+\frac{\mathrm{Y}^3}{10}\right)+p\left(\frac{4\mathrm{X}^3\mathrm{Y}}{15}+\frac{8\mathrm{XY}^3}{105}\right)\right\} \quad \text{(I)},$$

$$f=\frac{1}{\mathrm{ET}}\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}^3}{3}+\frac{\mathrm{XY}^2}{15}\right)+p\left(\frac{5\mathrm{X}^4}{24}+\frac{\mathrm{X}^2\mathrm{Y}^2}{20}\right)\right\} \quad \text{(II)},$$

$$\mathrm{T}_x=\frac{(\mathrm{P}+2px)\,\mathrm{Y}x}{\sqrt{\{\mathrm{X}^4+4\mathrm{Y}^2x^2\}}} \quad \text{(III)}.$$

Quando gli estremi B e D dell'arco non possono strisciare nel piano orizzontale di appoggio, esercitano contro di questo una spinta orizzontale, la cui intensità è data da

$$\mathrm{Q}=\frac{1}{2}\mathrm{P}\left\{\frac{25\mathrm{X}}{32\mathrm{Y}}-\frac{\mathrm{Y}}{28\mathrm{X}}\right\}-p\,\frac{\mathrm{X}^2}{2\mathrm{Y}} \quad \text{(IV)}.$$

Ponendo per Q il suo valore, ed $\frac{1}{2}\mathrm{P}+p\mathrm{X}$ in luogo di P nella (II) del precedente §, si avrà l'abbassamento verticale:

$$f=-\frac{\mathrm{P}}{2\mathrm{ET}}\left\{\frac{\mathrm{X}^3}{128}-\frac{23\mathrm{XY}^2}{6720}\right\} \quad \text{(V)},$$

da cui si vede, che l'abbassamento f è indipendente dal peso p distribuito sopra l'unità di lunghezza della proiezione orizzontale dell'arco. Per $\mathrm{P}=0$, $f=0$, l'arco cioè non riceve alcuna alterazione di forma, se gli estremi B e D sono fermati in modo da non potersi spostare nè orizzontalmente nè verticalmente. In tal caso la reazione verticale dell'appoggio è $p\mathrm{X}$; la spinta orizzontale è:

$$\mathrm{Q}=\frac{\mathrm{X}^2}{2\mathrm{Y}}\,p \quad \text{(VI)}.$$

Nelle sezioni dell'arco viene cimentata la resistenza o alla compressione od alla estensione, secondo che l'arco presenta la sua concavità rivolta verso il basso o verso l'alto. Quindi ponendo nella (III) del precedente § il valore di Q dato da (VI), e pX per P la forza, che svilupperà la resistenza alla compressione od alla estensione nella sezione posta a distanza x da A, si avrà l'intensità:

$$T_x = \frac{\frac{X^2}{2Y} pX^2 + px.\,2Yx}{\sqrt{\{X^4 + 4Y^2x^2\}}} = \frac{pX^4 + 4px^2Y^2}{2Y\sqrt{\{X^4 + 4Y^2x^2\}}} \qquad \text{(VII)}.$$

Le sezioni estreme B e D quindi subiscono la massima tensione:

$$T' = \frac{pX^4 + 4pX^2Y^2}{2Y\sqrt{\{X^4 + 4Y^2X^2\}}} = \frac{pX}{2Y}\sqrt{\{X^2 + 4Y^2\}} \qquad \text{(VIII)}.$$

Esempio. Un arco parabolico in ghisa di sezione circolare vuota, disposto in un piano verticale, appoggiato nelle estremità a due piedritti, che si oppongono allo spostamento sì verticale che orizzontale dei loro punti estremi, è caricato di un peso di 2500 chilogrammi per ogni metro corrente della sua proiezione orizzontale. La sezione trasversale abbia il raggio esterno $= 1^m$; la corda dell'arco $= 40^m$; la sua saetta $= 5^m$.

Si domanda:

1° Il raggio interno della sezione circolare;

2° La reazione verticale;

3° La spinta orizzontale degli appoggi.

In ogni sezione dell'arco vien cimentata la resistenza alla compressione da forza, la cui intensità è data dalla (VII). Quella all'imposta riceve la massima pressione.

$$T = \frac{pX}{2Y}\sqrt{\{X^2 + 4Y^2\}} = \frac{2500.20}{10}\sqrt{\{20^2 + 4.5^2\}} =$$

$$= 120000 \text{ chilogrammi.}$$

Se poniamo il coefficiente di resistenza alla rottura per pressione della ghisa $= 3$ chilogrammi per m.m.q.; il raggio interno

x della sezione circolare vuota all'imposta dell'arco sarà dato da

$$3000000\,\pi\,(1^2 - x^2) = 120000 \text{ chilogrammi},$$

da cui:

$$x = 0^m,99.$$

La reazione verticale dell'appoggio, è:

$$V = pX = 2500.20 = 50000 \text{ chilogrammi.}$$

La spinta orizzontale dell'arco contro il piedritto, è:

$$Q = \frac{X^2}{2Y}\,p = \frac{\overline{20}^2}{10}\,2500 = 100000 \text{ chilogrammi.}$$

§ 47. Equazione della linea, secondo la quale si dispone un arco parabolico, il quale appoggia nelle estremità sopra un piano orizzontale ed è caricato di un peso in un punto qualunque della sua lunghezza.

L'arco BAD (*Fig.* 44) avente per asse una parabola colla saetta AC verticale, e gli appoggi B e D orizzontali, è caricato di un peso P applicato nel punto E posto a distanza z dalla saetta AC. Sotto l'azione di tale carico vien alterata la forma dell'arco, il quale si dispone secondo BmnD.

Esprimiamo con:

z la distanza EF del punto di applicazione E dall'asse AC,
x ed y le coordinate del punto L rispetto agli assi EF, ES,
V la pressione verticale,
H la spinta orizzontale dell'appoggio B,
V′ la pressione verticale,
H′ la spinta orizzontale dell'appoggio D,
C la tangente trigonometrica dell'angolo ED′Z delle due tangenti ED′, AZ.

Ritenendo tutte le denominazioni adottate finora, si avrà:

$$y = \frac{Y}{X^2}(2zx + x^2); \qquad \text{tang.}\,\beta = \frac{2Y}{X^2}(z + x);$$

$$h = \frac{2Y}{X^2}(z + x)\,\delta; \qquad d = \delta\sqrt{1 + \text{tang.}^2\,\beta}.$$

L'arco EB si può supporre fermo in E e sollecitato nell'estremo B dalle forze V e Q, la prima verticale diretta verso l'alto, la seconda orizzontale diretta da destra a sinistra. Il momento statico delle forze estrinseche rispetto alla sezione L è:

$$M = V\left(X - z - x\right) + H \frac{Y}{X^2}\left(X^2 - (z + x)^2\right) \qquad \text{(I)}.$$

Seguendo un metodo analogo a quello tenuto nel § 44, si ottiene:

$$(\varphi' - \varphi) - (\beta' - \beta) = \frac{\delta}{ET}\left[V(X - z - x) + \frac{HY}{X^2}(X^2 - z^2 - \right.$$

$$\left. - 2zx - x^2)\right],$$

da cui:

$$\varphi - \beta = \frac{1}{ET}\left[C + V\left\{(X - z)\,x - \frac{1}{2}x^2\right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{HY}{X^2}\left\{(X^2 - z^2)\,x - zx^2 - \frac{1}{3}x^3\right\}\right];$$

quindi si ha:

$$\delta' - \delta = -\frac{2Y\delta}{ETX^2}\left[C(z + x) + V\left\{(X - z)\,zx + \frac{1}{2}(2X - 3z)\,x^2 - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}x^3\right\} + \frac{HY}{X^2}\left\{(X^2 - z^2)\,zx - z^2x^2 + (X^2 - z^2)\,x^2 - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{4zx^3}{3} - \frac{x^4}{3}\right\}\right];$$

$$h' - h = \frac{\delta}{ET}\left[C + V\left\{(X - z)\,x - \frac{x^2}{2}\right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{HY}{X^2}\left\{(X^2 - z^2)\,x - zx^2 - \frac{x^3}{3}\right\}\right];$$

quindi invece delle (VII) e (VIII) del § 44, si ottiene:

$$x' - x = -\frac{2Y}{ETX^2}\left[C\left(zx + \frac{x^2}{2}\right) + V\left\{(X - z)\frac{zx^2}{2} + \right.\right.$$

$$\left. + \left(X - \frac{3z}{2}\right)\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8}\right\} + \frac{HY}{X^2}\left\{(X^2 - z^2)\frac{zx^2}{2} + (X^2 - 2z^2)\frac{x^3}{3} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{zx^4}{3} - \frac{x^5}{15}\right\}\right];$$

$$y' - y = \frac{1}{ET}\left[Cx + V\left\{(x - z)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{HY}{X^2}\left\{(X^2 - z^2)\frac{x^2}{2} - \frac{zx^3}{3} - \frac{x^4}{12}\right\}\right].$$

Esprimendo con h' l'orizzontale, con f' il verticale spostamento del punto estremo B, essendo l'ascissa del punto B data da $X - z$, risulta:

$$h' = -\frac{2Y}{ETX^2}\left[\frac{1}{2}C(X^2 - z^2) + V\left\{\frac{5X^4}{24} - \frac{X^3 z}{2} + \frac{X^2 z^2}{4} + \frac{Xz^3}{6} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{z^4}{8}\right\} + \frac{HY}{X^2}\left\{\frac{4X^5}{15} - \frac{X^4 z}{2} + \frac{X^2 z^3}{3} - \frac{z^5}{10}\right\}\right] \qquad \text{(II)},$$

$$f' = \frac{1}{ET}\left[C(X - z) + V\left\{\frac{X^3}{3} - X^2 z + Xz^2 - \frac{z^3}{3}\right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{HY}{X^2}\left\{\frac{5X^4}{12} - X^3 z + \frac{X^2 z^2}{2} - \frac{Xz^3}{3} - \frac{z^4}{4}\right\}\right] \qquad \text{(III)}.$$

Le eguaglianze stabilite precedentemente servono pure per la parte EAD della linea quando si cambiano i segni a C e z.

Segnando con f'' lo spostamento verticale e con h'' l'orizzontale del punto D, si ottiene:

$$h'' = -\frac{2Y}{ETX^2}\left[-\frac{C}{2}(X^2 - z^2) + V'\left\{\frac{5X^4}{24} + \frac{X^3 z}{2} + \frac{X^2 z^2}{4} - \frac{X z^3}{6} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{z^4}{8}\right\} + \frac{H'Y}{X^2}\left\{\frac{4X^5}{15} + \frac{X^4 z}{2} - \frac{X^2 z^3}{3} + \frac{z^5}{10}\right\}\right] \qquad \text{(IV)},$$

$$f'' = \frac{1}{ET}\left[-C(X+z) + V'\left\{\frac{X^3}{3} + X^2 z + X z^2 + \frac{z^3}{3}\right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{H'Y}{X^2}\left\{\frac{5X^4}{12} + X^3 z + \frac{X^2 z^2}{2} - \frac{X z^3}{3} - \frac{z^4}{4}\right\}\right] \qquad \text{(V)}.$$

Ora ponendo:

$$V = -P\frac{X+z}{2X}, \qquad V' = -P\frac{X-z}{2X},$$

$$H = H', \qquad h' = -h'', \qquad f' = f'',$$

nelle eguaglianze precedenti, si ottiene:

$$H = H' = \frac{5P}{64X^3Y}(5X^4 - 6X^2z^2 + z^4) \qquad \text{(VI)},$$

$$C = -\frac{P}{X}\left(\frac{X^2 z}{3} - \frac{z^3}{3}\right) + \frac{5P}{64X^5}\left(X^2 z - \frac{z^3}{3}\right)(5X^4 - 6X^2z^2 + z^4) \qquad \text{(VII)},$$

$$h' = -h'' = \frac{PYz}{96ETX^7}(4X^8 + X^6z^2 - 15X^4z^4 + 11X^2z^6 - z^8) \qquad \text{(VIII)},$$

$$f' = f'' = -\frac{P}{768X^5ET}(3X^8 + 44X^6z^2 - 102X^4z^4 + 60X^2z^6 - 5z^8) \qquad \text{(IX)}.$$

Quando l'arco è caricato ancora da un peso uniformemente distribuito sopra la sua proiezione orizzontale, allora la pressione verticale :

$$V = P\,\frac{X + z}{2X} + pX \qquad (X),$$

e la pressione verticale

$$V' = P\,\frac{X - z}{2X} + pX \qquad (XI),$$

la spinta orizzontale

$$H = H' = \frac{pX^2}{2Y} + \frac{5P}{64X^3Y}\,(5X^4 - 6X^2z^2 + z^4) \qquad (XII),$$

la somma delle forze tangenziali :

$$T_x = \frac{pX^2}{2Y} + \frac{pY\,(X + z)\,(z + x)}{X^3} + \frac{5P}{64X^3Y}\,(5X^4 - 6X^2z^2 + z^4) \; (XIII).$$

Le altre eguaglianze non cambiano, perchè il carico uniformemente distribuito non esercita alcuna influenza sopra la deformazione dell'arco.

§ 48. Equazione della linea, secondo la qnale si dispone nn prisma circolare, incastrato ad una estremità, sollecitato nella sua lunghezza da un peso uniformemente distribuito, e nell'altro estremo da nna forza verticale ed nna orizzontale.

L'arco di circolo AB (*Fig.* 45) avente il centro in M, sia l'asse di un prisma incastrato in A e sollecitato nella sua lunghezza da un peso uniformemente distribuito, e nell'estremo B dalle forze P e Q.

Siano :

α e β gli archi di raggio 1, che misurano gli angoli delle tangenti nei punti B e D colla orizzontale AZ,

X, Y le coordinate del punto B,

x, y quelle di D,

d la lunghezza dell'arco FD, e β' l'angolo FMA.

Ora osservo, che:

$$X = r \text{ sen. } \alpha, \quad Y = r(1 - \cos. \alpha), \quad x = r \text{ sen. } \beta,$$

$$y = r(1 - \cos. \beta), \quad d = r(\beta - \beta').$$

Rispetto alla sezione D,

il momento di P è: $-P(X - x) = -P(r \text{ sen. } \alpha - r \text{ sen. } \beta)$,

» Q è: $Q(Y - y) = Qr(\cos. \beta - \cos. \alpha)$,

quello del peso uniformemente distribuito in DB è:

$$M' = pr(\alpha - \beta) . SG = pr(\alpha - \beta)(GC - x)$$

ma, $GC = \frac{2r}{\alpha - \beta} \text{ sen. } \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ sen. } \frac{\alpha + \beta}{2}$

quindi:

$$M' = 2r^2 p \text{ sen. } \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ sen. } \frac{\alpha + \beta}{2} - pr^2 (\alpha - \beta) \text{ sen. } \beta = r^2 p [\cos. \beta -$$

$$- \cos. \alpha - (\alpha - \beta) \text{ sen. } \beta].$$

Dalla (II) del § 44, si avrà:

$$(\varphi' - \varphi) - (\beta' - \beta) = \frac{r^2(\beta' - \beta)}{ET} \Big\{ - P(\text{sen. } \alpha - \text{sen. } \beta) +$$

$$+ Q(\cos. \beta - \cos. \alpha) + pr[\cos. \beta - \cos. \alpha - (\alpha - \beta) \text{ sen. } \beta] \Big\} \quad (I).$$

Operando in modo analogo a quello tenuto nel § 44, lo spostamento orizzontale di D, ossia:

$$x' - x = -\frac{r^3}{\mathrm{ET}} \Big\{ -\mathrm{P}\Big[\text{sen.}\,\alpha\,(\text{sen.}\,\beta - \beta\cos.\,\beta) + \frac{1}{2}\text{sen.}^2\beta + \cos.\,\beta - 1 \Big] +$$

$$+ \mathrm{Q}\Big[\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\text{sen.}\,\beta\cos.\,\beta - \cos.\,\alpha\,(\text{sen.}\,\beta - \beta\cos.\,\beta) \Big] +$$

$$+ pr\Big[\frac{5}{4}\beta - \frac{5}{4}\text{sen.}\,\beta\cos.\,\beta - \cos.\,\alpha\,(\text{sen.}\,\beta - \beta\cos\beta) -$$

$$- \frac{1}{2}\beta\,\text{sen.}^2\beta + \alpha\,(\frac{1}{2}\text{sen.}^2\beta + \cos.\,\beta - 1) \Big] \Big\} \qquad \text{(II)},$$

e quello verticale:

$$y' - y = \frac{r^3}{\mathrm{ET}} \Big\{ -\mathrm{P}\Big[[\text{sen.}\,\beta\,(\beta\,\text{sen.}\,\beta + \cos.\,\beta - 1)] + \frac{1}{2}\text{sen.}\,\beta\cos.\,\beta +$$

$$+ \frac{1}{2}\beta - \text{sen.}\,\beta \Big] + \mathrm{Q}\Big[\frac{1}{2}\text{sen.}^2\beta - \cos.\,\alpha\,(\beta\,\text{sen.}\,\beta + \cos.\,\beta - 1) \Big] +$$

$$+ pr\Big[\frac{5}{4}\text{sen.}^2\beta - \frac{1}{2}\beta\,\text{sen.}\,\beta\cos.\,\beta - \frac{1}{4}\beta^2 - \cos.\,\alpha\,(\beta\,\text{sen.}\,\beta +$$

$$+ \cos.\,\beta - 1) + \alpha\,(\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\text{sen.}\,\beta\cos.\,\beta - \text{sen.}\,\beta) \Big] \Big\} \qquad \text{(III)}.$$

Ponendo $\beta = \alpha$, si avrà per il punto estremo B:

$$x' - x = h = -\frac{r^3}{\mathrm{ET}} \Big\{ -\mathrm{P}\,(\frac{3}{2}\text{sen.}^2\alpha - \alpha\,\text{sen.}\,\alpha\cos.\,\alpha + \cos.\,\alpha - 1) +$$

$$+ \mathrm{Q}\,(\frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2}\text{sen.}\,\alpha\cos.\,\alpha + \alpha\cos.^2\alpha) +$$

$$+ pr\Big[\alpha\,(\frac{1}{4} + \cos.\,\alpha + \cos.^2\alpha) - \frac{9}{4}\text{sen.}\,\alpha\cos.\,\alpha \Big] \Big\} \qquad \text{(IV)}$$

$$Y' - Y = f = \frac{r^3}{ET} \Big\{ -P(\alpha\,\text{sen.}^2\alpha + \frac{3}{2}\,\text{sen.}\,\alpha\cos.\,\alpha - 2\,\text{sen.}\,\alpha + \frac{1}{2}\alpha) +$$

$$+ Q\,(\frac{1}{2}\,\text{sen.}^2\alpha - \alpha\,\text{sen.}\,\alpha\cos.\,\alpha + \cos.\,\alpha - 1) +$$

$$+ pr\,[\cos.\,\alpha - \cos.^2\alpha + \frac{1}{4}\alpha^2 - \alpha\,(\text{sen.}\,\alpha + \text{sen.}\,\alpha\cos.\,\alpha) +$$

$$+ \frac{5}{4}\,\text{sen.}^2\alpha\,] \Big\} \qquad \text{(V)}.$$

Trasportiamo le forze che sollecitano AD, parallelamente a sè stesse nel punto D, scompongasi ciascuna di esse in due, una normale, l'altra tangenziale alla linea. La somma delle componenti tangenziali è:

$$T_x = P\,\text{sen.}\,\beta + Q\cos.\,\beta - pr\,\text{sen.}\,\beta.(\alpha - \beta) \qquad \text{(VI)}.$$

Se l'arco AB è un quarto di circonferenza, allora:

$$\alpha = 90° = \frac{1}{4}\pi,$$

perciò:

$$\text{sen.}\,\alpha = 1, \qquad \cos.\,\alpha = 0.$$

Ponendo nelle (IV) e (V) tali valori, si ottiene:

$$h = -\frac{r^3}{ET}\Big\{ -\frac{1}{2}P + \frac{\pi}{4}Q + \frac{\pi}{8}pr \Big\} \qquad \text{(VII)},$$

$$f = \frac{r^3}{ET}\Big\{ -P\frac{3\pi - 8}{4} + \frac{1}{2}Q + pr\,\frac{\pi^2 - 8\pi + 20}{16} \Big\} \qquad \text{(VIII)}.$$

Un prisma arcuato appoggiato nelle due estremità sopra un piano orizzontale, abbia per asse una semicirconferenza e sia caricato di un peso uniformemente distribuito nella sua lunghezza (*Fig.* 46).

La reazione verticale dell'appoggio è:

$$P = \frac{1}{2} r \pi p.$$

Se gli estremi B e D non possono spostarsi orizzontalmente, allora l'arco esercita una spinta orizzontale data dalla (VII), nella quale si ponga $h = 0$.

Dunque:

$$Q = \frac{pr}{2} = \frac{P}{\pi} = 0{,}318\, P \qquad \text{(IX)}.$$

Ponendo nella (VIII) per P e Q i loro valori, si ottiene:

$$f = 0{,}0134 \frac{pr^4}{ET} \qquad \text{(X)}.$$

Così dalla (II) ponendo $\alpha = \frac{\pi}{2}$, si ha:

$$x' - x = -\frac{pr^4 \pi}{2ET} \left\{ \beta \cos.\beta - \text{sen.}\,\beta + \frac{1}{\pi} (3\beta - 3\,\text{sen.}\,\beta \cos.\beta - \right.$$

$$\left. - \beta\, \text{sen.}^2 \beta) \right\} \qquad \text{(XI)},$$

dalla quale risulta che per

$$\beta = 60^\circ = 1{,}0472, \ \text{sen.}\,\beta = 0{,}866, \ \cos.\beta = 0{,}50,$$

lo spostamento orizzontale riceve il massimo valore:

$$h' = 0{,}0087 \frac{pr^4}{ET} \qquad \text{(XII)}.$$

Nel caso in cui l'angolo α è molto piccolo, sostituiti per sen. α, cos. α i loro sviluppi in serie, si potranno trascurare le potenze superiori al 5° grado. (Nota V).

Dalle (IV) e (V), si otterrà:

$$h = -\frac{r^3}{ET}\left\{ -P\frac{5\alpha^4}{24} + Q\frac{2\alpha^5}{15} + pr\frac{3\alpha^5}{40}\right\} \qquad (XIII),$$

$$f = \frac{r^3}{ET}\left\{ -P\left(\frac{\alpha^3}{3} - \frac{3\alpha^5}{20}\right) + Q\frac{5\alpha^4}{24} + pr\frac{\alpha^4}{8}\right\} \qquad (XIV).$$

L'arco caricato sopra tutta la sua lunghezza esercita sopra gli appoggi una pressione verticale $P = pr\alpha$. Quando le sue estremità non possono spostarsi orizzontalmente, lo spostamento orizzontale $h = 0$ ed esercitano una spinta

$$Q = pr \qquad (1),$$

che si ha dalla (XII), ponendo $P = pr\alpha$ ed $h = 0$.

In questo caso l'abbassamento della chiave è:

$$f = \frac{pr\alpha}{ET}\,\frac{3r^3\alpha^5}{20} \qquad (2).$$

Ora BC = C D = α, essendo tale angolo piccolissimo, la semicorda:

$$X = r\,\text{sen.}\,\alpha = r\alpha,$$

quindi:

$$Q = \frac{Pr}{X} \qquad (XV),$$

$$f = \frac{P}{ET}\,\frac{3X^5}{20r^2} \qquad (XVI).$$

§ 49. Equazione di stabilità per un arco semicircolare appoggiato alle due estremità e caricato di un peso uniformemente distribuito sopra la sua proiezione orizzontale.

Un prisma BB' (*Fig.* 46) arcuato avente per asse una semicirconferenza sia caricato di un peso uniformemente distribuito sopra la proiezione orizzontale.

Sia p il peso distribuito sopra l'unità di lunghezza della proiezione orizzontale, P la reazione verticale dell'appoggio, Q la spinta orizzontale.

Le coordinate di una sezione qualunque D sono:

$$x = r \,\text{sen.}\, \beta, \qquad y = r\,(1 - \cos.\, \beta).$$

Il momento delle forze estrinseche rispetto a D è:

$$M = -\,Pr\,(1 - \text{sen.}\,\beta) + Qr \cos.\,\beta + pr^2 \left(\frac{1}{2} - \text{sen.}\,\beta + \frac{1}{2}\text{sen.}^2\,\beta\right),$$

quindi dalla (I) del § 48 si ha:

$$\frac{(\varphi' - \varphi) - (\beta' - \beta)}{\beta' - \beta} = \frac{r^2}{ET} \left\{ -P\,(1 - \text{sen.}\,\beta) + Q \cos.\,\beta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} pr\,(1 - 2\,\text{sen.}\,\beta + \text{sen.}^2\,\beta) \right\} \qquad \text{(I)}.$$

Operando in modo analogo a quello tenuto nei precedenti paragrafi, si avrà lo spostamento orizzontale:

$$x' - x = -\frac{r^3}{ET} \left\{ -P\,(\text{sen.}\,\beta - \beta \cos.\,\beta + \frac{1}{2}\text{sen.}^2\,\beta + \cos.\,\beta - 1) + \right.$$

$$+ Q\left(\frac{1}{2}\,\beta + \frac{1}{2}\,\text{sen.}\,\beta \cos.\,\beta\right) +$$

$$\left. + pr\left(\frac{3}{4}\text{sen.}\,\beta - \frac{3}{4}\,\beta \cos.\,\beta + \frac{1}{2}\text{sen.}^2\,\beta + \cos.\,\beta - 1 - \frac{1}{12}\text{sen.}^3\,\beta\right) \right\}$$

$$\text{(II)}.$$

Per trovare lo spostamento del punto estremo, si ponga nella (II) l'angolo

$$\beta = \alpha = \frac{\pi}{2},$$

si ottiene:

$$h = -\frac{r^3}{ET} \left\{ -\frac{P}{2} + \frac{\pi}{4}\,Q + \frac{1}{6}pr \right\}.$$

Se a tale spostamento si oppone l'appoggio, allora $h=0$ e la spinta orizzontale:

$$Q=\frac{4}{3\pi}pr=0{,}4246\,pr \qquad \text{(III)}.$$

Ponendo nella (II) $P=pr$, $Q=0{,}4246\,pr$, lo spostamento orizzontale di un punto qualunque, ossia

$$x'-x=\frac{pr^4}{ET}\left\{\frac{1}{4}\,\text{sen.}\,\beta-\frac{1}{4}\,\beta\cos.\beta+\frac{\text{sen.}^3\beta}{12}-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{3\pi}(\beta-\text{sen.}\,\beta\cos.\beta)\right\} \qquad \text{(IV)},$$

il suo massimo valore è dato da:

$$\beta=63^\circ=1{,}10, \qquad \text{sen.}\,\beta=0{,}891, \qquad \cos.\beta=0{,}454;$$

quindi il punto che dista di 63° dalla chiave dell'arco subisce il massimo spostamento:

$$h'=0{,}0053\frac{pr^4}{ET} \qquad \text{(V)}.$$

L'abbassamento verticale, che subisce un punto dell'arco è:

$$y'-y=\frac{r^3}{ET}\left\{-P\left(\beta\,\text{sen.}\,\beta+\cos.\beta-1+\frac{1}{2}\text{sen.}\,\beta\cos.\beta+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{2}\beta-\text{sen.}\,\beta\Big)+Q\frac{1}{2}\text{sen.}^2\beta+pr\Big(\frac{3}{4}\beta\,\text{sen.}\,\beta+\frac{3}{4}\cos.\beta-\frac{3}{4}+$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\text{sen.}\,\beta\cos.\beta-\text{sen.}\,\beta+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{12}\cos.^3\beta-\frac{1}{12}\right)\right\} \qquad \text{(VI)}.$$

Ponendo:

$$\beta=90^\circ=\frac{\pi}{2}, \qquad \text{sen.}\,\beta=1, \qquad \cos.\beta=0,$$

si ottiene:

$$f=\frac{r^3}{\mathrm{ET}}\left\{-\mathrm{P}\left(\frac{3}{4}\pi-2\right)+\frac{1}{2}\mathrm{Q}+pr\left(\frac{5}{8}\pi-\frac{22}{12}\right)\right\}.$$

Ma $\mathrm{P}=pr$, $\mathrm{Q}=0{,}4246\,pr$, quindi:

$$f=-\frac{pr^4}{\mathrm{ET}}\;\frac{3\pi^2-4\pi-16}{24\pi}=-0{,}0137\,\frac{pr^4}{\mathrm{ET}} \qquad \text{(VII)}.$$

Trasportando le forze P, Q e pr (1 — sen. β) che agiscono sopra BD parallelamente a sè stesse fino in D, scomponendo ciascuna di esse in due, una diretta secondo la tangente, l'altra secondo la normale al punto D, sarà la somma delle componenti tangenziali:

$$\mathrm{T}_x=\mathrm{P}\,\text{sen.}\,\beta+\mathrm{Q}\cos.\,\beta-pr\,(1-\text{sen.}\,\beta)\,\text{sen.}\,\beta=$$

$$=pr\,(\text{sen.}^2\beta+\frac{4}{3\pi}\cos.\,\beta) \qquad \text{(VIII)}.$$

Nel prisma BAB′ vien cimentata la resistenza alla flessione da forze oblique all'asse, nel § 38 venne trovata l'equazione di stabilità:

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{E}}=\frac{\mathrm{T}_x}{\Omega\mathrm{E}}+\frac{h\mathrm{M}}{2\mathrm{ET}},$$

dove Ω è l'area della sezione, E il modulo di elasticità, h l'altezza della sezione, T il suo momento d'inerzia rispetto all'asse orizzontale passante per il centro di gravità.

Ponendo per T_x ed M i loro valori si ottiene:

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{E}}=\frac{pr}{\Omega\mathrm{E}}\,(\text{sen.}^2\beta+\frac{4\cos.\,\beta}{3\pi})\pm\frac{rh}{2\mathrm{ET}}\left\{-pr\,(1-\text{sen.}\,\beta)+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{3\pi}\,pr\cos.\,\beta+pr\,(\frac{1}{2}-\text{sen.}\,\beta+\frac{1}{2}\,\text{sen.}^2\beta)\right\}=$$

$$=\frac{pr}{\Omega\mathrm{E}}\,(\text{sen.}^2\beta+\frac{4\cos.\,\beta}{3\pi})\pm\frac{pr^2h}{2\mathrm{ET}}\,(\frac{4\cos.\,\beta}{3\pi}-\frac{1}{2}\cos.^2\beta) \qquad \text{(IX)}.$$

da cui:

$$R\Omega = pr \left\{ \text{sen.}^2 \beta + \frac{4 \cos. \beta}{3\pi} \pm \frac{rh\Omega}{2T} \left(\frac{4 \cos. \beta}{3\pi} - \frac{1}{2} \cos.^2 \beta \right) \right\} \quad \text{(X)}.$$

La sezione più pericolosa è quella che subisce il massimo spostamento, quindi ponendo $\beta = 63°$, si ha:

$$R\Omega_1 = pr \left(1{,}36 + 0{,}085 \frac{rh\Omega_1}{2T} \right) \quad \text{(XI)}.$$

Ponendo $\beta = 0$, la sezione della chiave dell'arco è data da:

$$R\Omega_2 = pr \left(0{,}434 + 0{,}076 \frac{rh\Omega_2}{2T} \right) \quad \text{(XII)}.$$

Esempio. Una centina circolare in ferro a tutta monta collocata in un piano verticale, di sezione trasversale a doppio T (*Fig.* 47), è connessa stabilmente alle due estremità ad appoggi orizzontali.

La trave circolare di intrados, di cui nella figura 42 si vede la sezione fatta sulla linea *bb*, alta 250^{mm}. è formata di due lastre in ferro di 300^{mm} di lunghezza ed 8 di spessore, congiunte per mezzo di ferri d'angolo aventi le dimensioni $\frac{71 - 71}{8}$, ad una lastra ad esse perpendicolare. Quella di estrados ha le stesse dimensioni.

Queste due travi circolari sono unite l'una all'altra da una parete a traliccio. La sezione dell'arco ha la forma di un doppio T dell'altezza di 2^{m}. Il raggio d'intrados è 24^{m}, quello di estrados è 26^{m}. Si dimanda:

1° L'intensità del peso P, che può essere distribuito sopra ogni metro della sua proiezione orizzontale, volendo che il ferro non abbia da sopportare uno sforzo > 6 chilogr. per m.m.q.;

2° La reazione verticale degli appoggi;

3° La loro spinta orizzontale;

4° Lo spostamento orizzontale della sezione più pericolosa sotto l'azione del peso p distribuito uniformemente sopra ogni metro della sua proiezione orizzontale;

5° L'abbassamento della chiave dell'arco.

Il momento d'inerzia T della sezione rispetto all'asse orizzontale passante per il suo centro di gravità, trascurando il traliccio, è dato dalla somma del momento d'inerzia t' della sezione delle lastre estreme, di t'' momento d'inerzia della sezione dei ferri d'angolo, e di t''' momento d'inerzia della sezione delle lastre verticali. Ora:

$$t' = 0{,}01, \qquad t'' = 0{,}00365, \qquad t''' = 0{,}00358,$$

quindi:

$$T = 0{,}01 + 0{,}00365 + 0{,}00358 = 0{,}017231.$$

L'area della sezione a doppio T, trascurando il traliccio, è:

$$\Omega = 0^{mq},041642.$$

Il raggio dell'asse dell'arco ossia $r = 25^m$.
L'altezza h della sezione è 2^m.
Ponendo tali valori nella (X), si ottiene:

$$249852 = p.\,25\,(\,1{,}36 + 0{,}085\,\frac{50 \times 0{,}041642}{0{,}034462}\,),$$

da cui:

$$p = 1539 \text{ chilogrammi.}$$

Quindi la centina potrà sopportare un peso di 76956 chilogrammi, uniformemente distribuito sopra la sua proiezione orizzontale.

Sotto l'azione di tale carico, l'arco esercita sopra ciascuno degli appoggi una pressione:

$$P = pr = 1539 \times 25 = 38475 \text{ chilogrammi,}$$

ed una spinta orizzontale:

$$Q = 0{,}4246\,pr = 16336{,}48 \text{ chilogrammi.}$$

L'arco sotto l'azione del carico permanente e dell'accidentale si inflette, la sezione posta a 63° dalla chiave riceve uno spostamento orizzontale:

$$h' = 0{,}0053 \frac{pr^4}{\mathrm{ET}} = 0{,}0053 \frac{1539 \times 390615}{259650000} = 0{,}0053 \times 2{,}3 = 0^m{,}012,$$

e la chiave si abbassa verticalmente della quantità:

$$f = 0{,}0137 \frac{pr^4}{\mathrm{ET}} = 0{,}0137 \times 2{,}3 = 0^m{,}03151.$$

CAPITOLO VII.

RESISTENZA ALLA COMPRESSIONE, QUANDO LO SCHIACCIAMENTO È ACCOMPAGNATO DA INCURVAMENTO.

§ 50. Equazione della linea, secondo la quale si dispone l'asse di un prisma caricato di punta.

Sia il prisma TB (*Fig.* 48) rettilineo leggermente inclinato alla verticale, incastrato in B e caricato nell'estremità A di un peso P. Sotto l'azione di tale forza l'asse BT si inflette e prende la posizione BA.

Siano:

BJ, FK, DZ le tangenti nei punti B, F, D,

β, α_1, α_2 gli archi di raggio 1, che misurano gli angoli BJC, DZC, FKC,

ρ il raggio di curvatura della linea nel punto D,

x, y le coordinate AE, DE del punto D,

Y ordinata del punto B della linea dalla verticale,

$z = \mathrm{DH} = \mathrm{EG}$ la distanza di due ordinate DE, FG,

$\delta = \mathrm{FH} = \mathrm{FG} - \mathrm{DE} = \mathrm{FG} - y$ la differenza di tali due ordinate.

Il momento statico della forza P rispetto alla sezione D è Py.

Il momento di resistenza della sezione eguaglia $\frac{\mathrm{ET}}{\rho}$, quindi per l'equilibrio dovrà aversi:

$$\mathrm{P}y = \frac{\mathrm{ET}}{\rho} \qquad (1).$$

Ora nella nota III venne trovato:

$$\rho = \frac{z}{\text{tang.}(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

quindi:

$$\text{tang.}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{z}{\text{ET}} \text{P}y,$$

ossia:

$$\frac{2\delta}{z} \text{tang.}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{2\text{P}}{\text{ET}} y\delta.$$

Ma $\frac{\delta}{z} = \text{tang.}\,\alpha_1$, perciò:

$$2\,\text{tang.}\,\alpha_1\,\text{tang.}(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\,\frac{\text{P}}{\text{ET}} y\delta \qquad (\text{I}).$$

Ora poniamo il piccolissimo angolo $\alpha_1 - \alpha_2 = \gamma$, si avrà:

$$\text{tang.}^2\,\alpha_2 = \text{tang.}^2(\alpha_1 - \gamma) = \left(\frac{\text{tang.}\,\alpha_1 - \text{tang.}\,\gamma}{1 + \text{tang.}\,\alpha_1\,\text{tang.}\,\gamma}\right)^2 =$$

$$= (\text{tang.}\,\alpha_1 - \text{tang.}\,\gamma)^2 = \text{tang.}^2\,\alpha_1 - 2\,\text{tang.}\,\alpha_1\,\text{tang.}\,\gamma,$$

quindi:

$$2\,\text{tang.}\,\alpha_1\,\text{tang.}(\alpha_1 - \alpha_2) = \text{tang.}^2\,\alpha_1 - \text{tang.}^2\,\alpha_2,$$

sostituendo tale valore nella (I) risulta:

$$\text{tang.}^2\,\alpha_1 - \text{tang.}^2\,\alpha_2 = \frac{2\text{P}}{\text{ET}} y\delta \qquad (\text{II}).$$

Si immagini DE $= y$ diviso in un numero n grandissimo di parti, si conducano per tali punti di divisione rette parallele ad AC seganti la linea AD in punti, che disteranno da AC di 1δ, 2δ, 3δ . . . , $n\delta$, per essere δ la lunghezza di ciascuna parte.

Siano α_1, α_2, α_3 . . . , α_n gli angoli, che le tangenti in tali punti fanno con AC, sia φ l'angolo, che la tangente in A fa colla verticale.

Ponendo nella (II) successivamente per y i valori 1δ, 2δ, 3δ . . . , $n\delta$, si ottiene:

$$\text{tang.}^2\,\varphi - \text{tang.}^2\,\alpha_1 = \frac{2P\delta}{ET}(1\delta),$$

$$\text{tang.}^2\,\alpha_1 - \text{tang.}^2\,\alpha_2 = \frac{2P\delta}{ET}(2\delta),$$

. . . .

$$\text{tang.}^2\,\alpha_{n-1} - \text{tang.}^2\,\alpha_n = \frac{2P\delta}{ET}(n\delta).$$

Sommando i primi ed i secondi membri si ha:

$$\text{tang.}^2\,\varphi - \text{tang.}^2\,\alpha_n = \frac{P}{ET}y^2 \qquad \text{(III)}.$$

Supponiamo ora che la direzione della forza passi per B ed AMB (*Fig.* 49) sia la posizione dell'asse del prisma dopo l'inflessione.

Sia f l'ordinata del punto M di mezzo dalla linea, ossia la saetta di AMB.

Per $y = f$, tang. $\alpha_n = 0$, quindi:

$$\text{tang.}^2\,\varphi = \frac{P}{ET}f^2 \qquad (2),$$

ponendo tale valore nella (III), si ha:

$$\text{tang.}\,\alpha = \sqrt{\left\{\frac{P}{ET}(f^2 - y^2)\right\}} \qquad (3).$$

Ma tang. $\alpha = \frac{\delta}{z}$, quindi:

$$z = \frac{\delta}{\sqrt{\left\{\frac{P}{ET}(f^2 - y^2)\right\}}} \qquad (4).$$

Ponendo $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{ET}} f^2 = a^2$, $\frac{1}{f} = m$, si avrà:

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{ET}} y^2 = y^2 a^2 \frac{1}{f^2} = y^2 a^2 m^2,$$

perciò:

$$z = \frac{\delta}{\sqrt{\{ a^2 - y^2 a^2 m^2 \}}} = \frac{\delta}{a} \, \frac{1}{\sqrt{\{ 1 - y^2 m^2 \}}} =$$

$$= \frac{\delta}{a} \left\{ 1 + \frac{1}{2} m^2 y^2 + \frac{3}{2.2.2} m^4 y^4 + \frac{5}{2.2.2.2} m^6 y^6 + \ldots \right\}.$$

Ponendo per y successivamente i valori 1δ, 2δ, 3δ . . . , $n\delta$ e per z i corrispondenti z_1, z_2, z_3 . . . , si ottiene:

$$z_1 = \frac{\delta}{a} \left\{ 1 + \frac{1}{2} m^2 (1\delta)^2 + \frac{3}{2.2.2} m^4 (1\delta)^4 + \ldots \right\},$$

$$z_2 = \frac{\delta}{a} \left\{ 1 + \frac{1}{2} m^2 (2\delta)^2 + \frac{3}{2.2.2} m^4 (2\delta)^4 + \ldots \right\},$$

. . . .

$$z_n = \frac{\delta}{a} \left\{ 1 + \frac{1}{2} m^2 (n\delta)^2 + \frac{3}{2.2.2.} m^4 (n\delta)^4 + \ldots \right\}.$$

Sommando i primi ed i secondi membri, si ottiene:

$$x = \frac{1}{am} \left\{ my + \frac{(my)^3}{1.2.3} + \frac{3\,(my)^5}{1.2.4.5} + \frac{1.3.5\,(my)^7}{1.2.4.5.6.7} + \ldots \right\} =$$

$$= \frac{1}{am} \text{ arc. sen. } (my).$$

(**Nota VI**).

Ponendo per a e per m i loro valori, l'equazione della linea AMB sarà:

$$x=\sqrt{\frac{ET}{P}}\ \text{arc. sen.}\left(\frac{y}{f}\right) \qquad \text{(IV)}.$$

da cui:

$$y=f\,\text{sen.}\,x\sqrt{\frac{P}{ET}} \qquad \text{(V)}.$$

Per $y=f$, si ha $x=\frac{l}{2}$ metà della lunghezza del prisma, quindi:

$$1=\text{sen.}\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{ET}},\quad \text{ma } 1=\text{sen.}\frac{\pi}{2},\quad \text{quindi } \frac{\pi}{2}=\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{ET}},$$

da cui:

$$\frac{P}{ET}=\frac{\pi^2}{l^2} \qquad \text{(VI)}.$$

Dalla (I) si ha il raggio di curvatura:

$$\rho=\frac{ET}{Py} \qquad \text{(VII)}.$$

Per $y=f$ il raggio di curvatura ha il minimo valore, quindi nel mezzo la linea riceve la curvatura massima.

Per $y=0$, il raggio di curvatura $\rho=\infty$, ossia nei punti A, B l'elemento di linea è rettilineo.

§ 51. Equazione generale di stabilità. — Un prisma ad asse rettilineo verticale appoggi colla base inferiore sopra un piano orizzontale e sia caricato di un peso uniformemente distribuito nella faccia superiore (*Fig.* 50). Le molteplici esperienze ci hanno fatto conoscere, che l'azione del peso non solo produce uno schiacciamento, ma ancora un incurvamento, che dipende dal rapporto della altezza del prisma collo spessore.

Nei prismi la cui altezza è considerevole rispetto alla più piccola dimensione della sezione trasversale, ha luogo più facilmente

l'incurvamento, che non lo schiacciamento, presentando il prisma in tal caso minore resistenza alla flessione che alla compressione.

Siano:

y ed f le ordinate dei punti m, M,

Ω l'area della sezione trasversale,

λ il massimo accorciamento, che può subire una fibra di lunghezza $= 1$ seuza alterazione di elasticità,

d la più piccola dimensione della sezione trasversale,

l l'altezza del prisma,

K_2 lo sforzo capace di fare subire alla fibra di lunghezza $= 1$ l'accorciamento λ.

Consideriamo la sezione ed, questa viene schiacciata da P e portata per l'inflessione in gh rotando intorno all'asse neutro.

Il momento della forza estrinseca rispetto al centro di gravità di tale sezione è Py, quindi per l'equilibrio dovrà aversi:

$$Py = \frac{ET}{\rho}.$$

Ora nel § 10 si è trovato:

$$\frac{ET}{\rho} = \frac{K_2 T}{\frac{1}{2}d},$$

quindi:

$$Py = \frac{K_2 T}{\frac{1}{2}d},$$

da cui:

$$\frac{K_2}{E} = \frac{\frac{1}{2}dP}{ET}\, y,$$

il quale è il valore dell'accorciamento, che subisce l'unità di lunghezza del prisma per effetto della flessione.

Ora lo schiacciamento accorcia l'unità di lunghezza di fibra di $\frac{P}{\Omega E}$, quindi per la stabilità si dovrà avere:

$$\lambda = \frac{P}{\Omega E} + \frac{\frac{1}{2}Pd}{ETy} = \frac{K_2}{E} \qquad (1).$$

da cui:

$$K_2\Omega = P \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{2} d\Omega}{T} y \right\} \qquad \text{(II)}.$$

La sezione più pericolosa è quella che ha l'ordinata f, quindi:

$$K_2\Omega = P \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{2} d\Omega}{T} f \right\}$$

da cui:

$$P = \frac{K_2\Omega}{1 + \frac{d\Omega}{2T} f} \qquad \text{(III)}.$$

Ora dalla (VII) del § 50 si ha la saetta:

$$f = \frac{ET}{P\rho} = \frac{l^2}{\pi^2 \rho}.$$

Prolungasi hg fino in O, si ponga $OM = \rho$, dai triangoli simili dmg, mOM si ha la proiezione $OM : Mm = md : dg$, ossia:

$$\rho : 1 = \frac{d}{2} : \lambda,$$

da cui:

$$\rho = \frac{\frac{1}{2} d}{\lambda},$$

quindi:

$$f = 0{,}1014 \frac{l^2 \lambda}{\frac{1}{2} d}.$$

Ponendo tale valore in (III) si ottiene l'equazione di stabilità.

$$P = \frac{K_2\Omega}{1 + 0{,}1014\, l^2 \lambda \frac{\Omega}{T}} = \frac{K_2\Omega}{1 + \gamma} \qquad \text{(IV)}.$$

Se d è il lato minore della sezione rettangolare del prisma avente l'altezza $l = nd$ essendo $n > 1$, si ha il momento d'inerzia:

$$T = \frac{1}{12}\,\Omega d^2,$$

e l'equazione di stabilità:

$$P = \frac{K_2\Omega}{1 + 0{,}1014\,(nd)^2\lambda\,\dfrac{\Omega}{\dfrac{1}{12}\,\Omega d^2}} = \frac{K_2\Omega}{1 + 1{,}216\,n^2\lambda} \qquad \text{(V)}.$$

Per sezione circolare di raggio r, risulta:

$$\Omega = \pi r^2, \qquad T = \frac{1}{16}\,\Omega d^2,$$

ponendo l'altezza $l = nd$, si ottiene:

$$P = \frac{K_2\Omega}{1 + 1{,}622\,n^2\lambda} \qquad \text{(VI)}.$$

L'equazione di stabilità per un tubo cilindrico di diametro esterno d, e di diametro interno d' è:

$$P = \frac{K_2\Omega}{1 + 1{,}622\,n^2\lambda\,\dfrac{d^2}{d^2 - d'^2}} \qquad \text{(VII)}.$$

Un anello rettangolare sia la sezione rettangolare del prisma; b, d siano i lati del rettangolo maggiore, b' e d' quelli del minore.

Il momento d'inerzia:

$$T = \frac{1}{12}\,(bd^3 - b'd'^3),$$

e la forza:

$$P = \frac{K_2\Omega}{1 + 1{,}216\,(nd)^2\lambda\,\dfrac{bd - b'd'}{bd^3 - b'd'^3}} \qquad \text{(VIII)}.$$

Nel caso in cui $b=d$ e $b'=d'$, ossia quando la base del parallelepipedo esterno e dell'interno è un quadrato, allora:

$$P=\frac{K_2\Omega}{1+1{,}216\,n^2\lambda\frac{d^2}{d^2+d'^2}} \qquad \text{(VIII)}_a.$$

La sezione del prisma compresso sia crociforme. Poniamo:

d la retta $AB=EF$ (*Fig.* 51), basi dei rettangoli ABCD, EFGH,

$b=FG=CA$.

Pongasi la differenza $d-b=c$, il momento d'inerzia:

$$T=\frac{1}{12}(bd^3+cb^3),$$

$$P=\frac{K_2\Omega}{1+1{,}216\,n^2\lambda\frac{d^2(d+c)}{d^3+cb^3}} \qquad \text{(IX)}.$$

Sia ABCD (*Fig.* 5) la sezione del prisma. Poniamo:

l'altezza della sezione, ossia $AC=BD=h$,

lo spessore $Aa=Bb=Cc=Dd=b$,

la larghezza delle due tavole, ossia $AB=CD=d$,

l'altezza del gambo $ge=c$.

Il momento d'inerzia:

$$T=\frac{1}{12}\left\{d(h^3-c^3)+bc^3\right\},$$

quindi:

$$P=\frac{K_2\Omega}{1+1{,}216\,l^2\lambda\frac{2db+cb}{d(h^3-c^3)+bc^3}} \qquad \text{(X)},$$

quando le sezioni, per la flessione, si spostano rotando intorno ad un asse parallelo ad AB.

Nel caso invece in cui l'asse neutro è parallelo ad AC, il momento:

$$T=\frac{1}{12}\left\{d(h^3-c^3)+bc^3\right\},$$

perciò:

$$P=\frac{K_2\Omega}{1+1{,}216\,l^2\lambda\,\dfrac{2d+c}{2d^3+cb^2}} \qquad (XI).$$

Per sezione quadrata avente la diagonale $= D$ per asse neutro, il momento d'inerzia:

$$T=\frac{1}{6}D\,\frac{D^3}{2}=\frac{1}{24}\Omega D^2,\ e$$

$$P=\frac{K_2\Omega}{1+0{,}1014\,l^2\lambda\,\dfrac{\Omega}{\frac{1}{24}D^2\Omega}}=\frac{K_2\Omega}{1+2{,}433\,n^2\lambda} \qquad (XII),$$

dove $n=\frac{l}{D}$.

Ora il lato a del quadrato $=\frac{D}{1{,}414}$, ponendo nella equazione precedente $D=1{,}414\,a$, ed $l=ma$, si ottiene:

$$P=\frac{K_2\Omega}{1+1{,}72\,m^2\lambda} \qquad (XIII).$$

La stabilità di un prisma di sezione quadrata è minore di quello a sezione circolare di eguale area.

§ 52. **Equazione di stabilità per i prismi in legno, in ferro ed in ghisa.** — L'equazione di stabilità per i prismi, nei quali vien cimentata la resistenza alla compressione, contiene la quantità λ.

Nel caso, in cui l'unità di area della sezione trasversale del prisma non deve presentare una resistenza $>$ R coefficiente di resistenza eguale sì per la compressione, che per la estensione, i valori di λ consegnati nella tavola III^a, servono sì per gli allungamenti, che per gli accorciamenti, che subiscono le fibre sotto l'azione della forza $\overline{\overline{<}}$ RF, dove F è l'area della sezione del prisma; in tal caso:

per il legno $\lambda = 0,00117$,

per il ferro $\lambda = 0,00060$,

per la ghisa $\lambda = 0,00030$.

Se l'unità di area della sezione trasversale del prisma deve presentare la resistenza K_2 coefficiente di resistenza alla rottura per compressione allora $\lambda = \frac{K_2}{E}$.

Per il legno il valore di

$$\lambda = \frac{200}{130000} = 0,00153,$$

per il ferro

$$\lambda = \frac{3600}{2000000} = 0,0018,$$

quindi per il legno e per il ferro si può prendere $\lambda = 0,001$.

L'equazione di stabilità per i cilindri in legno ed in ferro, nei quali venga cimentata la resistenza alla compressione sarà:

$$P = \frac{K_2 F}{1 + 0,00162\, n^2} \qquad \text{(I)}.$$

e per i prismi di sezione rettangolare:

$$P = \frac{K_2 F}{1 + 0,00122\, n^2} \qquad \text{(II)}.$$

Nella tavola V sono registrati i valori P per diversi valori di n, rapporto tra l'altezza e la minima dimensione trasversale.

Per la ghisa si prende dai pratici $\lambda = 0,006$, quindi l'equazione di stabilità per i cilindri in ghisa soggetti alla compressione è:

$$P = \frac{K_2 F}{1 + 0,01\, n^2} \qquad \text{(III)}.$$

Nella tavola V_a, sono registrati i valori di P per i diversi valori di *n*.

Per tubi cilindrici in ghisa, dalla (VII) del § precedente si ottiene:

$$P = \frac{K_2 F}{1 + 0{,}01 \frac{(nd)^2}{d^2 + d_1^2}}.$$

Dei valori di K_2 consegnati nella tavola II, per maggior sicurezza se ne prenderà per il legno soltanto $\frac{1}{10}$, per il ferro e per la ghisa $\frac{1}{5}$.

§ 53. **Solido di eguale resistenza alla compressione.** — Sia il corpo DEFG ad asse verticale AB (*Fig.* 52), il quale appoggia colla base inferiore sopra un piano orizzontale e nella superiore è caricato di un peso P applicato in A; si domanda con quale legge debbono variare le sezioni, affinchè presentino eguale resistenza alla rottura, ossia affinchè il solido sia di eguale resistenza alla compressione. Le sezioni del solido siano circolari.

Sia r il raggio della base superiore e della inferiore, R quello della sezione di mezzo e ρ sia quello di una sezione qualunque.

Per la sezione MN, che dista di $Am = x$ dalla base superiore, si ha dalla (II) del § 51:

$$K_2 F = P \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{2} dF}{T} y \right\} \qquad (1).$$

Ora nel § 50 si trovò:

$$y = f \operatorname{sen}. x \sqrt{\left\{ \frac{P}{ET} \right\}} = f \operatorname{sen}. x \frac{\pi}{l}, \quad f = 0{,}1014 \frac{l^2 \lambda}{\frac{1}{2} d}, \quad F = \pi \rho^2,$$

quindi:

$$K_2 \pi \rho^2 = P \left[1 + \frac{F}{T} 0{,}1014\, l^2 \lambda \operatorname{sen}. x \frac{\pi}{l} \right] \qquad (2).$$

Ora con molta approssimazione si può porre:

$$\text{sen.}\, x\frac{\pi}{l} = \frac{1,9\, xl}{0,7\, l^2 + x^2},$$

perchè il valore del primo membro non varia di molto da quello del secondo per i diversi valori di x.

Per la sezione circolare il momento d'inerzia $T = \frac{1}{16} Fd^2$, ponendo tale valore in (2), si ha:

$$K_2 \pi \rho^2 = P \left\{ 1 + 1,622\, \lambda \left(\frac{l}{d}\right)^2 \frac{1,9\, xl}{0,7\, l^2 + x^2} \right\} \qquad \text{(I)}.$$

Ponendo $l = 2l'$

$$K_2 \pi \rho^2 = P \left\{ 1 + 24,64\, \lambda \left(\frac{l'}{d}\right)^2 \frac{xl'}{2,8\, l'^2 + x^2} \right\} \qquad \text{(II)}.$$

Per le sezioni estreme, $x = 0$ ed $y = 0$, quindi:

$$K_2 \pi r^2 = P \qquad \text{(III)}.$$

Per la sezione di mezzo:

$$x = \frac{1}{2} l, \qquad \rho = R,$$

perciò:

$$K_2 \pi R^2 = P \left\{ 1 + 1,622\, \lambda \left(\frac{l}{d}\right)^2 \right\},$$

ma $P = K_2 \pi r^2$, quindi:

$$R^2 = r^2 \left\{ 1 + 1,622\, \lambda \left(\frac{l}{d}\right)^2 \right\} \qquad \text{(IV)}.$$

Per un'altra sezione distante x dalla base superiore il raggio

$$\rho = \sqrt{\left[r^2 \left\{ 1 + 24,64\, \lambda \left(\frac{l'}{d}\right)^2 \frac{xl'}{2,8\, l'^2 + x^2} \right\} \right]} \qquad \text{(V)}.$$

Per un solido in legno od in ferro $\lambda = 0{,}001$, perciò:

$$\rho = r \sqrt{\left\{1 + 0{,}02464 \left(\frac{l'}{d}\right)^2 \frac{xl'}{2{,}8\, l'^2 + x^2}\right\}} \qquad \text{(VI)}.$$

Per solido in ghisa $\lambda = 0{,}006$,

$$\rho = r \sqrt{\left\{1 + 0{,}1478 \left(\frac{l'}{d}\right)^2 \frac{xl'}{2{,}8\, l'^2 + x^2}\right\}} \qquad \text{(VII)}.$$

nella quale $d = 2\rho$.

Nella (IV), il diametro $d = 2R$, e perciò il raggio

$$R = \sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left[r^2 + r\sqrt{r^2 + 1{,}622\,\lambda l^2}\right]\right\}} \qquad \text{(VIII)}.$$

Per solidi in legno ed in ferro il raggio della sezione di mezzo

$$R = \sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left[r^2 + r\sqrt{(r^2 + 0{,}00162\, l^2)}\right]\right\}} \qquad \text{(IX)}.$$

Per quelli in ghisa:

$$R = \sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left[r^2 + r\sqrt{r^2 + 0{,}00973\, l^2}\right]\right\}} \qquad \text{(X)},$$

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{2}\left[r^2 + r\sqrt{(r^2 + 0{,}1478\, l'^2)}\, \frac{xl'}{2{,}8\, l'^2 + x^2}\right]} \qquad \text{(XI)}.$$

Esempio. Un solido di eguale resistenza in ghisa di sezione circolare debba sopportare nella base superiore un peso di 28880 chilogrammi. Tutta l'altezza eguaglia 20 volte il diametro $2r$, quindi $l = 40r$, e $\frac{1}{2} l = l' = 20r$. Il coefficiente $K_2 = 10000$ chilogrammi per c.m.q., quindi $\frac{1}{5} K_2 = 2000$ chilogrammi.

Dalla (III) per la base superiore si ha $28880 = 2000\,\pi r^2$, da cui $r = 4{,}6$ centimetri.

Dalla (X) risulta per la sezione di mezzo, il raggio

$$R = \sqrt{\frac{1}{2}\left[r^2 + r\sqrt{(r^2 + 15{,}568\,r^2)}\right]} = 1{,}59\,r,$$

R = 7,314 centimetri.

Per un'altra sezione CD, posta a distanza $x = \frac{1}{4}\,l = 10r$ dalla base superiore, il raggio

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{2}\left[r^2 + r\sqrt{(r^2 + 59{,}12\,r^2\,\frac{200\,r^2}{1220\,r^2})}\right]} = r\sqrt{2{,}135} = 1{,}46r,$$

quindi:

$$\rho = 6{,}716 \text{ centimetri.}$$

quindi per $x = 0 = l$ il raggio della sezione $= r$, per $x = \frac{1}{4}\,l = \frac{3}{4}\,l$, il raggio $\rho = r + 0{,}46r$, per $x = \frac{1}{2}\,l$ il raggio $R = r + 0{,}59r$.

Ora il raggio di una sezione qualunque può essere espresso in funzione di R e di r.

Dalla (IV) si deduce:

$$\lambda\left(\frac{l'}{d}\right)^2 = \frac{R^2 - r^2}{6{,}58\,r^2},$$

ponendo tale valore nella (V) si ottiene:

$$\rho = \sqrt{\left[r^2 + 3{,}800\,(R^2 - r^2)\,\frac{xl'}{2{,}80\,l'^2 + x^2}\right]} \qquad \text{(XII)},$$

da cui:

per $x = 0$ si ha $\rho = r$,

per $x = \frac{1}{8}\,l'$ » $\rho = \sqrt{r^2 + 0{,}168\,(R^2 - r^2)}$,

per $x = \frac{1}{4} l'$ si ha $\rho = \sqrt{r^2 + 0,332\,(R^2 - r^2)}$,

per $x = \frac{1}{2} l'$ » $\rho = \sqrt{r^2 + 0,623\,(R^2 - r^2)}$,

per $x = \frac{3}{4} l'$ » $\rho = \sqrt{r^2 + 0,847\,(R^2 - r^2)}$,

per $x = l'$ » $\rho = R$.

CAPITOLO VIII.

RESISTENZA AL ROVESCIAMENTO.

§ 54. **Equazione generale di stabilità.** — Un corpo od un sistema di corpi in equilibrio dicesi stabile, quando spostato dalla sua posizione da forze estrinseche, ritorna nello stato iniziale al loro cessare; dicesi invece instabile, quando tende ad allontanarsi sempre più dalla posizione di equilibrio.

Il grado di stabilità del sistema è dato dalla intensità della forza, che devesi impiegare per spostarlo e smuoverlo.

Consideriamo un corpo prismatico, che appoggiato sopra un piano orizzontale, sia sollecitato da forze estrinseche a rotare intorno ad uno spigolo della faccia di appoggio.

Il momento delle forze, che si oppongono a tale rotazione, rispetto allo spigolo, intorno al quale tende ad avere luogo, dicesi momento di resistenza al rovesciamento.

Sia ABCD (*Fig.* 53) la sezione trasversale di un corpo prismatico, che appoggia sopra un piano orizzontale; sia ME la perpendicolare condotta dal centro di gravità M alla base AB. Il momento di resistenza S del peso del corpo al rovesciamento eguaglia il prodotto del peso P per EB, ossia:

$$S = P.\,(EB) \qquad (I).$$

Quando il corpo ABCD (*Fig.* 54) appoggia sopra un piano AB inclinato all'orizzontale di un angolo α, allora:

$$S = P.(EB) = P[(HB) - (HE)];$$

ma $(HB) = (BG).\cos.\alpha$, $(GF) = (HE) = (MG)\,\text{sen}.\,\alpha$;

ponendo $(BG) = a$, $(MG) = h$, si ottiene:

$$S = P(a\cos.\alpha - h\,\text{sen}.\,\alpha).$$

Se la verticale ME passa per il punto B, allora il corpo si trova sul punto di essere rovesciato dal minimo urto.

Un corpo cilindrico verticale di sezione circolare di raggio r appoggi sopra un piano orizzontale. Poniamo l'area $\pi r^2 = F$, e l'altezza $= h$, allora:

$$S = Fh\gamma.r \qquad \text{(II)},$$

dove γ è il peso di unità di volume. Per un prisma a base quadrata di lato a, il momento di resistenza:

$$S_1 = F_1 h_1 \gamma_1 . - \frac{1}{2} a \qquad \text{(III)}.$$

Per un prisma di sezione rettangolare di lato minore b, il momento di resistenza:

$$S_2 = F_2 h_2 \gamma_2 . - \frac{1}{2} b \qquad \text{(IV)}.$$

Nel caso, in cui $F = F_1 = F_2$, $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$, $h = h_1 = h_2$, ha luogo la proporzione:

$$S : S_1 : S_2 = 2r : a : b.$$

Un tubo cilindrico ad asse verticale di raggio esterno R, di raggio interno ρ e di altezza h presenta la stabilità:

$$S = \pi(R^2 - \rho^2)\gamma h R = Fh\gamma R \qquad \text{(V)}.$$

Un muro, avente per sezione trasversale il triangolo rettangolo ABC (*Fig.* 55) di base a e di altezza h, riposi sopra un piano orizzontale.

Sia l la sua lunghezza e sia A lo spigolo intorno al quale tende ad avere luogo la rotazione, allora il suo peso presenta il momento di resistenza

$$S = P.\,AE = \frac{1}{2} ahl\gamma . \frac{2}{3} a = \frac{1}{3} a^2 hl\gamma \qquad \text{(VI)}.$$

Se la rotazione tende ad aver luogo intorno B, allora:

$$S_1 = P.\,BE = \frac{1}{6} a^2 hl\gamma \qquad \text{(VII)}.$$

Il trapezio ABCD (*Fig.* 56) sia la sezione di un muro sollecitato a rovesciarsi, rotando intorno allo spigolo A. Poniamo $AB = a$, $DC = b$, $BC = h$, allora il momento di resistenza al rovesciamento

$$S = bhl\gamma \left(a - \frac{1}{2} b\right) + \frac{1}{3} lh\gamma (a - b)^2 =$$

$$= \frac{1}{6} hl\gamma (2a6 - b^2 + 2a^2) \qquad \text{(VIII)}.$$

Il solido parallelepipedo ABCD (*Fig.* 57) sia rinforzato di tratto in tratto da contrafforti GEA, AB ed A'B' dividano per metà nella proiezione orizzontale i due massi posti tra due contrafforti; si cerca la stabilità di BAEE'A'B', che tende a rotare intorno allo spigolo E.

Siano:

b, h, l le lunghezze dei tratti AB, BC e BB',

d, g, H le lunghezze delle rette Ea, EE' ed AG.

Il momento di ABB'A' rispetto ad EE' è:

$$blh\gamma \left(d + \frac{1}{2} b\right),$$

quello di GEA rispetto a tale spigolo è:

$$\frac{1}{3} d^2 gH\gamma \,.$$

quindi la stabilità di resistenza al rovesciamento del peso di BAB'A' sarà:

$$S = \frac{1}{3} d^2 g H \gamma + b l h \gamma \left(d + \frac{1}{2} b\right) \qquad \text{(IX)}.$$

Se il contrafforte ha l'altezza $H = h$, allora:

$$S = h\gamma \left\{ \frac{1}{3} d^2 g + b l d + \frac{1}{2} b^2 l \right\} \qquad \text{(X)}.$$

Se la faccia esterna è verticale, il momento

$$S = \frac{1}{2} h\gamma \left\{ d^2 g + 2 b l d + b^2 l \right\} \qquad \text{(XI)}.$$

La figura EJCDGF (*Fig.* 58) sia la sezione trasversale del muro spinto a rotare intorno allo spigolo E. Il momento di resistenza S del suo peso sarà eguale alla somma dei momenti di resistenza dei pesi dei massi JA, CB, BG. Poniamo $CD = b$, $EA = d$, $GF = H$, $AC = h$. allora:

$$S = b h l \gamma \left(d + \frac{1}{2} b\right) + \frac{1}{2} d^2 H l \gamma + d H l \gamma \left(b + \frac{2}{3} d\right) =$$

$$= \frac{1}{2} l \gamma \left\{ h \left(b^2 + 2bd\right) + H \left(4d^2 + 2db\right) \right\} \qquad \text{(XII)}.$$

Per l'equilibrio il momento della forza spingente deve eguagliare quello di resistenza rispetto allo spigolo, intorno al quale tende ad avere luogo la rotazione.

Se la forza estrinseca è orizzontale, allora il momento di resistenza è dato da quello del peso.

Se tale forza è obliqua e diretta dall'alto al basso, allora la si scompone in due componenti, una orizzontale l'altra verticale, il momento di resistenza sarà dato dalla somma dei momenti della componente verticale della spinta e del peso.

Quando la forza spingente è obliquamente diretta dal basso all'alto, allora il momento del peso eguaglia il momento di resistenza.

§ 55. Forma della sezione trasversale di un muro di eguale resistenza al rovesciamento. — Il muro ACB (*Fig.* 59), formato di materiali disposti a strati orizzontali e diviso in due parti simmetriche dal piano verticale CD, si trova sotto l'azione di uno sforzo orizzontale distribuito uniformemente sopra la faccia BC; si domandano gli spessori a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 . . . , dei successivi strati affinchè le parti Ca_1b_1, Ca_2b_2, Ca_3b_3 . . . , del muro presentino eguale resistenza al rovesciamento intorno gli spigoli a_1, a_2, a_3 . . . Si scomponga Cd in un numero n di parti con piani orizzontali posti alla distanza 1, così la lunghezza $dC = n$.

Siano x_1, x_2, x_3 . . . , x_n, gli spessori a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 . . . , $a_n b_n$.

Nel solido $Ca_n b_n$, di lunghezza eguale all'unità, e di altezza $= 1$, si esercita una pressione orizzontale $= pn$, il suo momento rispetto ad a_n è $= \frac{1}{2} pn^2$.

Il momento di resistenza di $Ca_n b_n$ al rovesciamento è $F\gamma \frac{1}{2} x_n$, dove F è l'area di $Ca_n b_n$, γ è il peso dell'unità di volume del materiale, per l'equilibrio si ottiene:

$$\frac{1}{2} pn^2 = \frac{1}{2} F\gamma x_n \qquad (1).$$

Ponendo nella (1) per n i valori 1, 2, 3 . . . , n, e per x_n i corrispondenti x_1, x_2, x_3 . . . , si avrà:

$$\frac{1}{2} x_1 \frac{x_1}{2} \gamma = \frac{1}{2} p,$$

da cui:

$$x_1 = \sqrt{\frac{2p}{\gamma}},$$

$$\frac{1}{2} x_2 \left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \gamma = \frac{1}{2} 2^2 . p,$$

da cui:

$$x_2 = \sqrt{ \left\{ \frac{2p}{\gamma} \left(\sqrt{1+4} - \sqrt{1} \right) \right\} },$$

$$\frac{1}{2}x_3\left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_2+x_3}{2}\right)\gamma=\frac{1}{2}3^2p,$$

da cui:

$$x_3=\sqrt{\left\{\frac{2p}{\gamma}\left(\sqrt{1+4+9}-\sqrt{1+4}\right)\right\}},$$

quindi:

$$x_n=\sqrt{\left\{\frac{2p}{\gamma}\left(\sqrt{1+4+9+16+\ldots+n^2}-\right.\right.}$$

$$\left.\left.-\sqrt{1+4+\ldots+(n-1)^2}\right)\right\},$$

$$x_n=\sqrt{\left\{\frac{2p}{\gamma}\left(\sqrt{\frac{2n^3+3n^2+n}{2.3}}-\sqrt{\frac{3n^3-3n^2+n}{2.3}}\right)\right\}} \quad \text{(I)},$$

con grande approssimazione si può porre:

$$x=n\sqrt{\left\{\frac{p}{3\gamma}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-3}\right)\right\}} \quad \text{(II)}.$$

Ponendo nelle precedenti $x=b$, $n=h$, si avrà la base

$$\mathrm{AB}=b=h\sqrt{\left\{\frac{p}{3\gamma}\left(\sqrt{2h+3}-\sqrt{2h-3}\right)\right\}} \quad \text{(III)}.$$

§ 56. Pressione massima nell'unità di area della faccia, nella quale tende ad avere luogo il distacco. — Il solido sollecitato da forze estrinseche a rotare intorno ad uno spigolo, può presentare nella faccia di appoggio pericolo di rottura per pressione; si domanda la massima pressione riferita all'unità di area nella faccia, nella quale tende ad avere luogo il distacco. Si

trovi la risultante R del peso P e della spinta H, si prolunghi R fino ad incontrare la base MN (*Fig.* 60). Se tale punto è nel centro della faccia di appoggio di area F, allora la pressione è distribuita uniformemente sopra MN, e la massima pressione riferita all'unità di area sarà $\frac{Q}{F}$, nella quale Q è la componente di R diretta normalmente ad MN. Se $\frac{Q}{F}$ è minore del coefficiente di resistenza alla rottura per pressione riferita all'unità di area, allora non vi sarà alcun pericolo di rottura per pressione.

Quando R è eccentrica, la pressione non si distribuisce più uniformemente, si domanda allora il valore della pressione massima riferita all'unità di area. Il rettangolo ABB'A' sia la base del solido. Il punto H di applicazione della forza Q si trovi a distanza $MH = u$ dallo spigolo AA', intorno al quale tende a farsi il rovesciamento. Scomponiamo con rette parallele ad AA', l'area ABB'A' in un numero n grandissimo di rettangoletti di altezza costante δ; supponiamo che la pressione, costante per ogni rettangoletto, vadi crescendo da BB' ad AA' proporzionalmente alla distanza dall'estremo BB'. Sia K la pressione massima riferita all'unità di area nell'elemento AA', k la pressione minima riferita all'unità di area in BB', c il lato $AB = A'B'$ ed 1 la lunghezza del lato $AA' = BB'$.

La pressione riferita all'unità di area nella lunghezza c subisce l'aumento $K - k$ e nella lunghezza x si accresce di $(K - k)\frac{x}{c}$; quindi le pressioni $p_1, p_2, p_3 \ldots, p_n$ sofferte dagli elementi successivi, nei quali è stato diviso il rettangolo base. saranno date dalle seguenti equazioni:

$$p_1 = k\delta,$$

$$p_2 = k\delta + (K - k)\frac{\delta}{c}\delta,$$

$$p_3 = k\delta + (K - k)\frac{2\delta}{c}2\delta,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_n = k\delta + (K - k)\frac{n\delta}{c}n\delta.$$

La somma dei primi membri eguaglia quella dei secondi, esprimendo Q la somma $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n$, si ottiene:

$$Q = k\,(n\delta) + (K - k)\,\frac{(n\delta)^2}{2c} = \frac{(K + k)\,c}{2} \qquad \text{(I)}.$$

Ora per l'equilibrio la somma dei momenti delle pressioni elementari rispetto ad AA' deve eguagliare il momento di Q rispetto a tale spigolo, ossia la somma di $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots, \mu_n$, momenti di $p_1, p_2, p_3 \ldots, p_n$, sarà eguale a Q $(c - u)$. Ora:

$$\mu_1 = k\delta^2 + \frac{K - k}{c}\,\delta^3,$$

$$\mu_2 = k2\delta^2 + \frac{K - k}{c}\,\delta^3 2^2,$$

$$\mu_3 = k3\delta^2 + \frac{K - k}{c}\,\delta^3 3^2,$$

. . . .

$$\mu_n = kn\delta^2 + \frac{K - k}{c}\,\delta^3 n^2.$$

Sommando i primi ed i secondi membri, si ottiene:

$$Q\,(c - u) = k\,\frac{n^2\delta^2}{2} + \frac{K - k}{c}\,\frac{n^3\delta^3}{3} = k\,\frac{c^2}{2} + \frac{K - k}{c}\,\frac{c^3}{3} \qquad \text{(II)}.$$

Eliminando k dalle (I) e (II), si ottiene:

$$K = Q\,\frac{4c - 6u}{c^2} \qquad \text{(III)},$$

la quale per $u = \frac{1}{2}c$ si riduce a $K = \frac{Q}{c}$.

Non sarà alcun pericolo di rottura per pressione, quando K sia minore del coefficiente di resistenza alla rottura per pressione riferita all'unità di area.

Esempio. Contro un muro della lunghezza di 1^m, terminato a scarpa esternamente ed à guisa di dentiera verso l'interno, vien esercitata una spinta orizzontale di 9000 chilogrammi, che si suppone concentrata nel mezzo del tronco di muro che si considera, ad $^1/_3$ della sua altezza partendo dal suo piede.

Si domanda di determinare il coefficiente di stabilità al rovesciamento, e la pressione massima riferita all'unità di area sopportata dalla faccia AN.

A base del calcolo richiesto si prenderanno le dimensioni segnate nella figura 61 e 2000 chilogrammi per peso del metro cubo di muratura.

Il muro ABDN sotto l'azione di $H = 9000$ chilogrammi applicata nel punto M tende a rotare intorno al punto A. Il momento di resistenza è dato dal prodotto del peso del masso murale per la distanza della verticale, che passa per il suo centro di gravità dallo spigolo A; il momento della spinta eguaglia il prodotto $9000 \times 2,6666 = 23994$; il rapporto di questi due momenti è il coefficiente di stabilità domandato.

Ora il momento della risultante eguaglia la somma dei momenti delle componenti, quindi il momento di resistenza è dato dalla somma dei momenti dei pesi dei massi murali ABC, BE, EH, MF rispetto allo spigolo A.

Il momento di $ABC = 8000.\ 0^m,66 = 5280,$

» $BE = 12800.\ 1^m,40 = 17920,$

» $EH = 2132.\ 1^m,90 = 4050,$

» $MF = 1596.\ 2^m,15 = 3431.$

Il peso del masso murale è:

$$8000 + 12800 + 2132 + 1596 = 24528 \text{ chilogrammi}.$$

Il momento di ABN rispetto allo spigolo A è:

$$5280 + 17920 + 4050 + 3431 = 30682.$$

Il coefficiente di stabilità al rovesciamento intorno allo spigolo orizzontale inferiore ed esterno A vien dato da

$$\frac{23994}{30682} = 0,782 \ldots,$$

ossia con grande approssimazione $= \frac{5}{6}$.

La pressione massima riferita all'unità di area nella superficie di distacco è data da:

$$K = Q \frac{4c - 6u}{c^2}.$$

Ora Q è la componente normale alla base della risultante delle forze, che sollecitano il masso ABN; nel nostro caso la Q è data dal peso di ABN = 24528 chilogrammi, essendo la H orizzontale, perciò parallela alla base:

$$c = AN = AC + CE + EF + FN =$$

$$= \frac{1}{8} 8 + 0,80 + 0,20 + 0,30 = 2^m,30;$$

$$u = 0,274,$$

dunque:

$$K = 24528 \frac{9,20 - 7,50}{5,29} = 34965 \text{ chilogrammi per m.q.}$$

numero, che è al disotto del coefficiente di resistenza alla rottura per pressione riferito al m.q. dei materiali laterizi.

CAPITOLO IX.

RESISTENZA ALLA ROTTURA PER SCORRIMENTO NEI MASSI IN MURATURA.

§ 57. **Equazione generale di stabilità.** — Sotto l'azione di una o più forze estrinseche, una parte di masso murale può staccarsi strisciando sopra l'altra, che rimane immobile. La resistenza, che si sviluppa, dicesi resistenza per scorrimento. La coesione delle malte, la loro aderenza coi materiali e l'attrito sono le forze che si oppongono a tale strisciamento, ma però esse non agiscono contemporaneamente, la terza entra in campo, quando è venuta meno l'una o l'altra delle due prime, si sviluppa la coesione o l'aderenza secondo la natura del cemento impiegato, e secondo l'età del suo impiego.

La coesione e l'aderenza sono proporzionali alla superficie F, lungo la quale tende ad avere luogo lo scorrimento. Chiamisi γ la resistenza presentata dalla coesione o dalla aderenza per ogni unità di area.

La forza di coesione o di aderenza sarà γF, la quale per l'equilibrio dovrà essere eguale alla forza estrinseca H, parallela alla faccia, nella quale si sviluppa la resistenza.

Un muro avente per sezione trasversale il rettangolo ABCD, formato di materiali disposti a strati orizzontali è sollecitato nel punto E dalla forza orizzontale H (*Fig.* 62). Chiamiamo:

b lo spessore uniforme del muro,
l la sua lunghezza,
h la sua altezza,
h' l'altezza di $CabD$.

La forza di coesione o di aderenza si sviluppa in un rettangolo di area bl, quindi la sua intensità è γbl; per l'equilibrio dovrà avere luogo l'equazione:

$$H = \gamma bl \qquad (I).$$

Vinta la coesione o l'aderenza, il masso tende a strisciare sopra un letto, ma allora si sviluppa lungo questa faccia la forza di attrito, la cui intensità è data dal prodotto del peso π del masso sovrastante per un coefficiente μ, detto coefficiente di attrito, la quale per l'equilibrio deve eguagliare H, quindi:

$$H = \mu\pi \qquad (II).$$

Ora la faccia, che presenta maggiore pericolo di rottura, è la *ab*, ossia quella, che segue immediatamente il punto di applicazione E della forza H, per avere il secondo membro della (II) per ogni sezione inferiore alla *ab* un valore maggiore di quello corrispoudente alla *ab*.

La forza di coesione o di aderenza può diminuire e cessare col tempo, mentre l'attrito è rinforzato dall'età col crescere il contatto, coll'aumentare delle asperità nelle faccie di contatto.

Esempio. Si trovino i coefficienti di stabilità allo scorrimento in un muro, la cui sezione trasversale è data dalla figura 61, sollecitato da uno sforzo orizzontale di 9000 chilogrammi applicato nel punto M ad $\frac{1}{3}$ della sua altezza totale partendo dal suo piede.

Il coefficiente di attrito tra muratura e muratura è 0,75.

Il valore γ della coesione si può assumere di chilogrammi 0,03 per ogni millimetro quadrato della superficie, sopra la quale la rottura tende a manifestarsi.

L'area ML, nella quale questa resistenza si sviluppa è:

$$\left(1+\frac{1}{8}\,5{,}332\right)=1^{\text{m.q.}},6665.$$

Il peso π del masso murale BDML eguaglia il prodotto dell'area della faccia BDML per 2000 peso del metro cubo di muratura, quindi:

$$\pi = 6{,}5743 \times 2000 = 13148{,}60 \text{ chilogrammi.}$$

La forza di coesione ha il valore:

$$16665 \times 3 = 49995 \text{ chilogrammi.}$$

Perciò il coefficiente di stabilità rispetto alla coesione è:

$$\frac{9000}{49995}=\frac{100}{555}.$$

La resistenza prodotta dall'attrito è:

$$13148{,}6 \times 0{,}75 = 9861.$$

quindi il coefficiente di stabilità rispetto all'attrito risulta da

$$\frac{9000}{9861} = \frac{100}{109}.$$

CAPITOLO X.

RESISTENZA ALLA TORSIONE.

§ 58. — Un albero in posizione orizzontale sia nel suo estremo B (*Fig.* 63) infisso stabilmente in un muro, e nell'altro estremo vi sia applicata una manovella od una ruota di raggio R, sulla cui circonferenza agisce la forza P procurando di farla girare; non potendo la manovella o la ruota girare intorno all'albero BC, le fibre di questo talmente si piegheranno, che la fibra B*a* per es. prenderà la posizione B*a'*, cioè dall'origine B verso C si allontanerà sempre dalla sua primitiva posizione, per tal maniera il cilindro viene a torcersi e svilupperà la resistenza alla torsione. Se al cessare delle forze tutte le fibre riprendono la primitiva posizione sarà segno, che la torsione è rimasta dentro il limite dell'elasticità.

Questa resistenza ben di rado viene sviluppata nei materiali impiegati nelle costruzioni, ma la sua considerazione viene a proposito in moltissime macchine.

Scomponiamo la sezione dell'albero cilindrico o parallelepipedo in un numero n grandissimo di aree elementari ω; sia $R_{iv}\omega$ la resistenza alla torsione sviluppata da ogni area ω, essendo R_{iv} il coefficiente di torsione dipendente dalla qualità della materia, di cui è formato il cilindro.

L'esperienza ha dimostrato che R_{iv} è proporzionale alla distanza r della fibra elementare ω dall'asse di rotazione, ed all'angolo θ di torsione, che due raggi inizialmente paralleli, posti in due sezioni distanti 1^m, fanno tra loro dopo la deformazione.

Chiamando G il coefficiente di proporzionalità, si ottiene:

$$R_{iv}\omega = G\theta r\omega \qquad (1).$$

Per l'equilibrio il momento M della forza estrinseca deve eguagliare la somma dei momenti delle forze intrinseche rispetto all'asse del prisma ossia $G\theta\Sigma\omega r^2$.

Ma $\Sigma\omega r^2$ è il momento d'inerzia I della sezione rispetto ad un asse passante per il suo centro di gravità e normale ad essa, dunque:

$$M = G\theta I \qquad (2).$$

Dalla (1), si ha:

$$G\theta = \frac{R_{iv}}{r},$$

quindi:

$$M = \frac{IR_{iv}}{r} \qquad (I),$$

nella quale per r si deve porre il valore della distanza della fibra più contorta dall'asse.

Per sezione circolare di diametro d nel § 13 si trovò:

$$I = \frac{1}{2}\pi\frac{d^4}{16},$$

essendo $r = \frac{d}{2}$, si avrà per gli alberi cilindrici di sezione circolare piena:

$$M = \frac{\pi}{16} R_{iv} d^3,$$

da cui:

$$d^3 = \frac{16 M}{\pi R_{iv}} \qquad (II).$$

Per sezione rettangolare coi lati a, b si osserva, che

$$I = \Sigma\,\omega r^2 = \Sigma\omega x^2 + \Sigma\omega y^2,$$

essendo x, y le coordinate di ω rispetto a due assi ortagonali condotti per il centro del rettangolo parallelamente ai lati, quindi:

$$I = \frac{1}{12} ab^3 + \frac{1}{12} a^3 b = \frac{1}{12} ab\,(a^2 + b^2).$$

Ponendo in (I) per l il suo valore, ed il raggio

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2},$$

si avrà:

$$M=\frac{1}{6}R_{IV}ab\sqrt{a^2+b^2} \qquad \text{(III)}.$$

Se la sezione è un quadrato di lato a, allora:

$$M=\frac{\sqrt{2}}{6}R_{IV}a^3 \qquad \text{(IV)}.$$

Sostituendo in queste formule il valore numerico di R_{IV} per ciascuna materia, si avrà il momento della forza, che può cimentare nel cilindro la resistenza di torsione senza alterare l'elasticità, ma in pratica bisognerà dare ai cilindri una grossezza 2 o 3 volte maggiore di quella indicata dalle formule, perciò si impiegherà un coefficiente R_{IV}, che sia soltanto la decima, la ventesima ed anche la trentesima parte di quello registrato nella tavola.

Sia $i = aCa'$ *l'angolo di torsione* corrispondente al momento M, esso sarà evidentemente tanto maggiore, quanto più è lontano dall'estremo BD del cilindro, che è infisso, vale a dire, se l è la lunghezza Ba del cilindro sarà i proporzionale ad l, ossia:

$$i=l\theta=\frac{lR_{IV}}{Gr},$$

e l'ampiezza

$$i^0=\frac{lR_{IV}}{Gr}\,\frac{180^0}{\pi} \qquad \text{(V)},$$

dove G è il modulo dell'elasticità di torsione.

Per sezione circolare di diametro d, il coefficiente

$$R_{IV}=\frac{16\,M}{\pi d^3}, \quad r=\frac{1}{2}d,$$

perciò:

$$i^0 = \frac{16\,M}{G}\,l\,\frac{360}{\pi^2 d^4} \qquad (VI),$$

per un asse parallelepipedo, la cui sezione sia un quadrato di lato a, l'angolo di torsione:

$$i^0 = \frac{6\,M}{G}\,l\,\frac{180^0}{\pi a^4} \qquad (VII).$$

Esempio. Trovare la resistenza, che deve presentare per m.m.q. della sua sezione l'albero cavo in ghisa, avente il raggio maggiore di 0,20 ed il minore di $0^m,12$, il quale porta una ruota idraulica destinata a trasmettere il lavoro di 70 cavalli-vapore colla velocità di $^1/_4$ di giro al minuto secondo.

Per trovare il valore della incognita R_{IV} dobbiamo avere i valori di M, del momento d'inerzia I e della distanza dall'asse della fibra più contorta.

Esprimendo con P la forza applicata tangenzialmente alla ruota idraulica di raggio R; il suo lavoro verrà dato dal prodotto della forza per la sua velocità ossia da

$$P.\,\frac{1}{4}\,2\pi R.$$

Il cavallo-vapore è di 75 chilogrammetri, quindi si avrà l'eguaglianza:

$$\frac{1}{4}\,P.\,2\pi R = 75.70,$$

da cui:

$$M = PR = 3343.$$

Ora il momento d'inerzia della corona circolare rispetto all'asse passante per il suo centro e diretto normalmente al piano del circolo si ha da

$$I = \frac{1}{2}\,\pi\,\frac{1}{16}\,\left\{\overline{0,40}^4 - \overline{0,24}^4\right\},$$

quindi:

$$I = 0,00218.$$

La distanza della fibra più coutorta dall'asse è $r = 0{,}20$, quindi chiamando x l'incognità si ha:

$$3343.\ 0{,}20 = x.\ 0{,}00218,$$

da cui:

$$x = 306699 \text{ chilogrammi},$$

quindi l'albero per ogni m.m.q. della sua sezione deve presentare una resistenza $R_{IV} = 0^{chil.},306699$.

CAPITOLO XI.

DELL'EQUILIBRIO DEI SISTEMI FUNICOLARI.

§ 59. **Poligono funicolare nel caso, in cui le forze hanno direzione qualunque.** — La fune, che si trova nelle estremità ed in più punti della sua lunghezza sollecitata da forze, forma un poligono funicolare; si dispone invece secondo una catenaria, quando si trova nelle estremità ed in ogni punto della sua lunghezza sotto l'azione di una forza.

Una fune AB (*Fig.* 64) fermata in A, sollecitata nell'altra dalla forza S, si dispone nella direzione di questa e viene stirata da A verso B; e le sue sezioni sopporteranno una tensione costante S, quando si supponga la fune flessibile, inestensibile e senza peso.

Nelle estremità A, B, D delle funi CA, CB e CD che si uniscono nel punto C (*Fig.* 65), siano applicate le forze P, Q, R, le quali giaciono nel piano CABD ed hanno la direzione della fune, alla quale ciascuna di esse è applicata. Si trasportino le dette forze in C*a*, C*b*, C*h*, si costruisca il parallelogramma C*adb*, per l'equilibrio dovrà la forza C*h* essere eguale e contraria alla C*d*; ossia se poniamo:

$$\alpha = adC, \quad \beta = dCa, \quad \gamma = Cad,$$

si dovrà avere:

$$P : Q : R = \text{sen.}\alpha : \text{sen.}\beta : \text{sen.}\gamma.$$

Ma

$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta), \quad \text{sen.}\gamma = \text{sen.}\,(\alpha + \beta),$$

quindi:

$$P : Q : R = \text{sen.}\alpha : \text{sen.}\beta : \text{sen.}\,(\alpha + \beta),$$

da cui:

$$P = R\,\frac{\text{sen.}\alpha}{\text{sen.}\,(\alpha + \beta)} \qquad \text{(I)},$$

$$Q = R\,\frac{\text{sen.}\beta}{\text{sen.}\,(\alpha + \beta)} \qquad \text{(II)},$$

tre forze cioè, applicate nello stesso punto e contenute nello stesso piano sono in equilibrio, quando la prima moltiplicata per il seno dell'angolo, che essa fa colla seconda, eguaglia il prodotto della terza per il seno dell'angolo, che questa fa colla seconda.

Più forze applicate nello stesso punto e contenute nello stesso piano sono in equilibrio, quando, condotti per il punto di applicazione due assi ortagonali, eguaglia zero e la somma delle proiezioni sopra un asse, e quella sopra l'altro.

Esprimendo con P_1, P_2, P_3 . . . , le forze, con α_1, α_2, α_3 . . . , gli angoli, che formano con un asse, le condizioni di equilibrio saranno:

$$P_1 \cos.\alpha_1 + P_2 \cos.\alpha_2 + P_3 \cos.\alpha_3 + \ldots = \Sigma\,(P \cos.\alpha) = 0 \quad \text{(III)},$$

$$P_1 \,\text{sen.}\alpha_1 + P_2 \,\text{sen.}\alpha_2 + P_3 \,\text{sen.}\alpha_3 + \ldots = \Sigma\,(P \,\text{sen.}\alpha) = 0 \quad \text{(IV)}.$$

Una fune ABCDE (*Fig.* 66) è sollecitata nell'estremità A, F e nei punti intermedii B, C, D, dalle forze S, T, P_1, P_2 e P_3, che giaciono nello stesso piano.

Tutte le sezioni del tratto BA sopportano una tensione costante = S, quindi il punto B si trova sotto l'azione delle forze S e P_1, ossia della loro risultante B*m*; per l'equilibrio il tratto BC deve trovarsi nella direzione di B*m*, le sue sezioni sopportano una tensione costante dalla forza B*m* = S_1; analogamente

il punto C è sollecitato dalle forze S_1 e P_2, per l'equilibrio il tratto DC si dispone nella direzione di Cm' risultante di S_1 e P_2, le sue sezioni vengono tese dalla $S_2 = Cm'$; finalmente nel punto D sono applicate le forze S_2 e P_3 ed il tratto E deve per l'equilibrio prendere la direzione della risultante T delle S_2, P_3 e le sue sezioni perciò vengono tese dalla forza T.

Conduciamo, per i punti A, B, C, D e E, le rette orizzontali AG, Bx, Cx', Dx'', Ex'''.

Poniamo:

α_1, α_2, α_3 gli augoli xBb, $x'Cc$, $x''Dd$,
φ l'angolo $GAB = yBA$,
μ l'angolo $DEx''' = EDy'''$,
$\beta = xBC = BCy'$,
$\gamma = y'CD = x''DC$.

Per l'equilibrio del punto B si avranno le equazioni:

$$S\,\text{sen.}\,(180 + \varphi) + P_1\,\text{sen.}\alpha_1 + S_1\,\text{sen.}\beta = 0 \quad (1),$$

$$S\cos.\,(180 + \varphi) + P_1\cos.\alpha_1 + S_1\cos.\beta = 0 \quad (2).$$

Per C, essendo l'angolo di CB con Cx' di $180 + \beta$, si avranno le condizioni:

$$S_1\,\text{sen.}\,(180 + \beta) + P_2\,\text{sen.}\alpha_2 + S_2\,\text{sen.}\,(180 + \gamma) = 0 \quad (3),$$

$$S_1\cos.\,(180 + \beta) + P_2\cos.\alpha_2 + S_2\cos.\,(180 + \gamma) = 0 \quad (4).$$

Per il punto D le condizioni di equilibrio saranno:

$$S_2\,\text{sen.}\gamma + P_3\,\text{sen.}\alpha_3 + T\,\text{sen.}\,(180 + \mu) = 0 \quad (5),$$

$$S_2\cos.\gamma + P_3\cos.\alpha_3 + T\cos.\,(180 + \mu) = 0 \quad (6).$$

Le condizioni di equilibrio del sistema funicolare saranno date dunque dalle seguenti equazioni:

$$P_1\,\text{sen.}\alpha_1 + P_2\,\text{sen.}\alpha_2 + P_3\,\text{sen.}\alpha_3 - S\,\text{sen.}\varphi - T\,\text{sen.}\mu = 0 \quad (V).$$

$$P_1\cos.\alpha_1 + P_2\cos.\alpha_2 + P_3\cos.\alpha_3 - S\cos.\varphi - T\cos.\mu = 0 \quad (VI),$$

la risultante cioè delle forze S e T deve equilibrare quella delle forze P_1, P_2, P_3 . . . , qualunque sia il loro numero.

§ 60. **Poligono funicolare sollecitato da pesi.** — Una fune fermata saldamente nelle estremità A ed F (*Fig.* 67), viene sollecitata nei punti intermedii dalle forze P_1, P_2, P_3 e P_4 verticali. La fune dovrà mantenersi in un piano verticale, le condizioni di equilibrio, (V) e (VI) del § precedente, si ridurranno alle seguenti:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - S \operatorname{sen}.\varphi - T \operatorname{sen}.\mu = 0 \qquad (I),$$

$$S \cos.\varphi + T \cos.\mu = 0 \qquad (II).$$

Esprimendo con R la somma dei pesi P_1, P_2, P_3 e P_4, si ottiene:

$$R = S \operatorname{sen}.\varphi + T \operatorname{sen}.\mu,$$

da cui:

$$T = \frac{R - S \operatorname{sen}.\varphi}{\operatorname{sen}.\mu} \qquad (III).$$

Dalla (II) si ha:

$$T = -\frac{S \cos.\varphi}{\cos.\mu},$$

quindi:

$$\frac{R - S \operatorname{sen}.\varphi}{\operatorname{sen}.\mu} = -\frac{S \cos.\varphi}{\cos.\mu},$$

da cui:

$$R \cos.\mu = S \operatorname{sen}.(\varphi - \mu) \qquad (1).$$

Dalla (III), la tensione

$$S = \frac{R - T \operatorname{sen}.\mu}{\operatorname{sen}.\varphi};$$

dalla (II), si ha:

$$S = -\frac{T \cos.\mu}{\cos.\varphi},$$

quindi:

$$R \cos.\varphi = T \operatorname{sen}(\mu - \varphi) \qquad (2).$$

Prolunghinsi le rette AB, EF fino al loro incontro in M, si conduca la verticale MN, che forma gli angoli x, y con MA ed MF, allora:

$$\varphi = 90 + x, \quad \mu = 90 - y, \quad \cos.\varphi = -\operatorname{sen}.x,$$

$$\cos.\mu = \operatorname{sen}.y, \quad \varphi - \mu = x + y, \quad \mu - \varphi = -(x + y).$$

Posti per $\cos.\varphi$, $\cos.\mu$, $\varphi - \mu$, $\mu - \varphi$, i valori precedenti, le (1) e (2) si riducono alle seguenti:

$$R \operatorname{sen}.y = S \operatorname{sen}.(x + y),$$

$$R \operatorname{sen}.x = T \operatorname{sen}.(x + y) \qquad (IV),$$

dalle quali:

$$S = \frac{R \operatorname{sen}.y}{\operatorname{sen}.(x + y)} \qquad (V),$$

$$T = R \frac{\operatorname{sen}.x}{\operatorname{sen}.(x + y)} \qquad (VI),$$

e dalla (II), risulta la proporzione:

$$S : T = \operatorname{sen}.y : \operatorname{sen}.x.$$

Ma dalle (V) e (VI) risulta:

$$S : R = \operatorname{sen}.y : \operatorname{sen}.(y + x), \quad T : R = \operatorname{sen}.x : \operatorname{sen}.(y + x).$$

quindi:

$$S : T : R = \text{sen.}y : \text{sen.}x : \text{sen.}\,(y+x),$$

ossia $R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \ldots$, è eguale e contraria alla risultante delle forze S e T.

§ 61. **Catenaria.** — Le eguaglianze stabilite nel § precedente sono indipendenti dal numero delle forze, che sollecitano la fune, quindi sussistono ancora quando ogni punto della fune è sollecitata da una forza. Sia la fune ACB (*Fig.* 68) fermata saldamente nelle estremità A, B, il punto più basso C ha la tangente orizzontale. Consideriamo il tratto CD, ed esprimiamo con S la tensione orizzontale in C della fune, e con T la tensione in D diretta secondo la tangente ED*d*.

Sia x l'angolo della tangente ED colla verticale, $y = 90$ l'angolo di S colla verticale, se R è la risultante dei pesi applicati in CD per l'equilibrio si ha:

$$T = \frac{R\,\text{sen.}y}{\text{sen.}\,(y+x)} = \frac{R}{\cos.x} \qquad \text{(I)},$$

$$S = R\,\frac{\text{sen.}x}{\text{sen.}\,(x+y)} = R\,\text{tang.}x \qquad \text{(II)}.$$

Scompongasi la tensione T applicata in D in due componenti, nella orizzontale H e nella verticale V, si avrà:

$$H = T\,\text{sen.}x, \qquad V = T\cos.x.$$

Dalle (I) e (II), risulta:

$$R = T\cos.x, \qquad R = \frac{S}{\text{tang.}x}, \qquad (1).$$

quindi:

$$T\cos.x = \frac{S}{\text{tang.}x}, \qquad (2),$$

da cui:

$$T\,\text{sen.}x = S \qquad \text{(III)}.$$

Dunque la componente orizzontale della tensione in ogni punto della fune è costante ed eguale alla tensione orizzontale in C; la componente verticale T cos.x eguaglia il peso distribuito dall'estremo fino alla sezione, che si considera.

Le (I), (II) e (III) sono le eguaglianze, dalle quali si deducono le proprietà della catenaria, la cui forma geometrica dipende dalla legge di distribuzione del carico, che deve sopportare.

I. Se il carico è distribuito uniformemente sopra la proiezione orizzontale della fune, allora questa disponesi secondo una parabola.

Sia ACB la fune sollecitata per ogni unità lineare della sua proiezione orizzontale dalla forza p (*Fig.* 69). Sia C l'origine di due assi, uno orizzontale, l'altro verticale.

Siano:

x ed y le coordinate del punto D,
X ed Y la semicorda e la saetta dell'arco,
R il peso applicato in CD,
H la tensione orizzontale in C,
T' quella del punto D della catenaria,
α l'angolo EDS della tangente DS coll'orizzontale.

Dalle (1) e (2), risulta:

$$R = T \text{ sen.}\alpha, \qquad H = T \cos.\alpha,$$

dalle quali:

$$\text{tang.}\alpha = \frac{R}{H} \tag{3}$$

Ma dalla figura 69, si ha:

$$\text{tang.}\alpha = \frac{dc}{Dd} = \frac{dc}{\delta} = \frac{R}{H},$$

da cui:

$$dc = \frac{R}{H}\,\delta \tag{4}$$

Dividasi DE in un numero n grandissimo di parti eguali a δ. conducansi per i punti d, d_1, d_2, d_3 . . . , di divisione le verticali dc, d_1c_1, d_2c_2 . . . ; dai punti c, c_1, c_2 . . . , tirinsi le orizzontali ce_1, c_1e_2, c_2e_3, . . .

Dalla (4), prendendo D come estremità a sinistra dell'arco. risulta:

$$dc = \frac{p\,(1\delta)}{H}\,\delta\,,$$

$$c_1e_1 = \frac{p\,(2\delta)}{H}\,\delta\,,$$

$$c_2e_2 = \frac{p\,(3\delta)}{H}\,\delta\,,$$

. . . .

Ora:

$$dc + c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 + \ldots = y, \quad n\delta = DE = x,$$

quindi:

$$y = \frac{p}{2H}\,x^2,$$

da cui:

$$x^2 = \frac{2H}{p}\,y \qquad \text{(IV)},$$

parabola di parametro $\frac{2H}{p}$.

Per la parabola dalla (8) del § 44, si ha:

$$\cos.\alpha = \frac{X^2}{\sqrt{X^4 + 4Y^2x^2}}\,,$$

quindi:

$$T' = H\,\frac{\sqrt{X^4 + 4Y^2x^2}}{X^2} \qquad (5)$$

Per il punto estremo A, si ha:

$$x = X, \qquad y = Y,$$

quindi:

$$X^2 = \frac{2H}{p} Y,$$

da cui:

$$H = \frac{pX^2}{2Y} \qquad (V).$$

valore della tensione nel punto più basso, ossia della componente orizzontale costante della tensione in ogni punto della fune.

Posto nella (3) per H il suo valore risulta:

$$T' = \frac{p}{2Y} \sqrt{X^4 + 4Y^2 x^2} \qquad (VI),$$

per $x = X$ si ottiene la tensione:

$$T = \frac{pX}{2Y} \sqrt{X^2 + 4Y^2} \qquad (VII).$$

I valori di H e di T ottenuti, coincidono con quelli trovati nel § 46.

Sostituito per H il suo valore nella (IV) risulta l'equazione della parabola:

$$x^2 = \frac{2}{p} \, \frac{pX^2}{2Y} \, y = \frac{X^2}{Y} \, y \qquad (VIII).$$

II. Se la fune è sollecitata da peso uniformemente distribuito sopra la sua lunghezza, allora si dispone secondo una catenaria.

Poniamo:

H la tensione nel punto più basso C avente la tangente orizzontale,

V la componente verticale della tensione in A,

v la componente verticale della tensione in un punto qualunque D,

l la lunghezza della linea CDA,

s la lunghezza del tratto CD,

r, ρ' e ρ i raggi di curvatura nei punti C, D e A.

Esprimendo con p il peso dell'unità di lunghezza della fune, si ottiene:

$$pl = V, \qquad ps = v.$$

La tensione H nel punto più basso C si può rappresentare col peso di una fune di lunghezza c, quindi $H = pc$. Le equazioni della catenaria sono:

$$s = \sqrt{2cy + y^2} \qquad \text{(IX)},$$

$$x = c \log. \text{nat.} \frac{c + y + \sqrt{\{2cy + y^2\}}}{c} \qquad \text{(X)},$$

$$x = \frac{s^2 - y^2}{2y} \log. \text{nat.} \frac{s + y}{s - y} \qquad \text{(XI)},$$

$$y = \frac{1}{2} c \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} - 2 \right) \qquad \text{(XII)}.$$

Colla (XII) si potranno calcolare i valori di y corrispondenti a quelli di x in funzione di c.

Nella tavola seguente sono registrati alcuni valori delle coordinate x, y in funzione di c per diversi valori del rapporto $\frac{y}{x}$.

$\frac{y}{x}$	x	y	$\frac{y}{x}$	x	y
0,050	0,10 c	0,0050 c	0,543	1,00 c	0,5430 c
0,100	0,20 c	0,0200 c	0,606	1,10 c	0,6664 c
0,151	0,30 c	0,0453 c	0,676	1,20 c	0,8107 c
0,203	0,40 c	0,0810 c	0,747	1,30 c	0,9709 c
0,255	0,50 c	0,1276 c	0,784	1,35 c	1,0583 c
0,309	0,60 c	0,1854 c	0,822	1,40 c	1,1509 c
0,364	0,70 c	0,2551 c	0,902	1,50 c	1,3524 c
0,422	0,80 c	0,3374 c	1,000	1,616 c	1,6158 c
0,451	0,85 c	0,3835 c	1,171	1,80 c	2,1074 c
0,512	0,95 c	0,4862 c	1,381	2,00 c	2,7622 c

Data la semicorda e la saetta, ossia noto il rapporto $\frac{Y}{X}$, facilmente si potrà calcolare il valore di c. Supponiamo $Y = 0,309\,X$, il rapporto $\frac{Y}{X} = 0,309$, al quale valore corrisponde per x quello di $0,60\,c$, quindi:

$$c = \frac{X}{0,60} = 1,666\,X.$$

Per il tratto CD della catenaria, ponendo nella (II) H invece di S, ps a luogo di R, per essere $\text{tang.}x = \text{cotg.}\alpha$, si ottiene:

$$H = \frac{ps}{\text{tang.}\alpha},$$

da cui:

$$\text{tang.}\alpha = \frac{ps}{H} = \frac{s}{c} = \frac{\sqrt{\{2cy + y^2\}}}{c} \qquad \text{(XIII).}$$

Per il punto A, al quale corrisponde $\alpha = \varphi$, $y = Y$, si ha:

$$\text{tang.}\varphi = \frac{\sqrt{\{2cY + Y^2\}}}{c} \qquad \text{(XIV).}$$

Il raggio di curvatura per un punto qualunque è.

$$\rho' = \frac{(c + y)^2}{c} \qquad \text{(XV),}$$

nel vertice:

$$r = c \qquad \text{(XVI),}$$

nel punto estremo A:

$$\rho = \frac{(c + Y)^2}{c} \qquad \text{(XVII).}$$

Esprimendo con T' la tensione in un punto qualunque, e con T quella nel punto A, si ha:

$$T'^2 = H^2 + v^2 = p^2c^2 + p^2s^2 = p^2\,(c^2 + 2cy + y^2),$$

da cui:

$$T' = p\,(c + y) = H + py \qquad \text{(XVIII),}$$

$$T = \sqrt{\{H^2 + V^2\}} = p\,(c + Y) \qquad \text{(XIX).}$$

Se la saetta di un arco di circolo non è maggiore di $\frac{1}{5}$ della semicorda e di $\frac{1}{10}$ della corda, allora l'arco di circolo poco differisce dall'arco di catenaria e senza sensibile errore si può considerare l'uno invece dell'altro. Se questa saetta è maggiore di $\frac{1}{10}$ della corda, la curva deve essere calcolata colle eguaglianze precedenti.

Nella seguente tabella sono registrati cinque esempi, nei quali per saette Y eguali a 0,255; 0,512; 0,75; 1,00 e 1,38 della semicorda, sono dati i valori delle ordinate corrispondenti a diverse ascisse, inoltre si trovano i valori della spinta orizzontale H, della tensione T, dell'angolo φ, dei raggi r e ρ.

RAPPORTO tra la saetta Y e la semicorda	H	T	φ	r	ρ	PER $x = 0,25\,X$ si ha	PER $x = \frac{1}{2}\,X$ si ha	PER $x = \frac{3}{4}\,X$ si ha
$Y = 0,255\,X$	$2\,pX$	$2,25\,pX$	27°	$2\,X$	$2,04\,X$	$y_1 = 0,015\,X$	$y_2 = 0,0628\,X$	$y_3 = 0,14\,X$
$Y = 0,512\,X$	$1,052\,pX$	$1,56\,pX$	47°	$1,05\,X$	$2,31\,X$	$y_1 = 0,033\,X$	$y_2 = 0,13\,X$	$y_3 = 0,27\,X$
$Y = 0,75\,X$	$0,77\,pX$	$1,52\,pX$	59° 40′	$0,77\,X$	$3\,X$	$y_1 = 0,42\,X$	$y_2 = 0,168\,X$	$y_3 = 0,39\,X$
$Y = X$	$0,618\,pX$	$1,618\,pX$	67° 30′	$0,618\,X$	$4,24\,X$	$y_1 = 0,05\,X$	$y_2 = 0,208\,X$	$y_3 = 0,50\,X$
$Y = 1,38\,X$	$0,50\,pX$	$1,88\,pX$	74° 36′	$0,5\,X$	$7,05\,X$	$y_1 = 0,063\,X$	$y_2 = 0,26\,X$	$y_3 = 0,676\,X$

§ 62. **Forma degli archi, affinchè le loro sezioni siano sollecitate da forze dirette normalmente ad esse.** — Sia il vôlto EABF (*Fig.* 70) composto di varii conci, che si mantengono in equilibrio per il reciproco loro contrasto; sia ACB la superficie d'intradosso, EDF quella d'estradosso, *mno* la linea asse, che passa per i centri di gravità di tutte le sezioni; a questa possonsi applicare le eguaglianze stabilite nel precedente paragrafo, onde determinare la forma in modo, che i varii conci sieno sollecitati da forze dirette normalmente alle sezioni corrispondenti.

Questa dunque è una parabola, quandò le forze sollecitanti sono distribuite uniformemente sopra la proiezione orizzontale; è catenaria invece nel caso, in cui le forze sono distribuite uniformemente sopra la lunghezza dell'arco.

Passiamo ora a determinare la forma nel caso, in cui le forze non sono distribuite uniformemente sopra l'arco.

Si consideri il semi-arco DCAE, lo si scomponga in parti mediante piani d_1c_1, d_2c_2, d_3c_3 . . . , che passano per l'asse M. Si conducano per il punto *m* dell'arco *mn* la tangente *mt*, la verticale *ms*, il raggio di curvatura *m*M normale ad *mt*, come pure la orizzontale MN, che forma l'angolo α col raggio *m*M. Si chiamino:

p_1, p_2, p_3 . . . , p_n i pesi da sopportarsi dai conci DCc_1d_1, $d_1c_1c_2d_2$, $c_2d_2d_3c_3$ . . . ,

β_1, β_2, β_3 . . . , β_n gli angoli, che le tangenti nei punti e_1, e_2, e_3 . . . , fanno coll'orizzontale,

H la spinta orizzontale dell'arco,

T la pressione tangenzialc all'imposta,

V la risultante dei pesi p_1, p_2, p_3 . . .

Se *mn* è la linea di equilibrio ed *ms* rappresenta il valore di V, sarà *st* la spinta orizzontale dell'arco ed *mt* in direzione ed in intensità la risultante delle forze, che cimentano l'imposta EA, quindi dal triangolo *tms* risulta la proporzione:

$$H : V = (ts) : (sm) = \text{tang.}\alpha : 1,$$

da cui:

$$H = V\ \text{tang.}\alpha \qquad (I).$$

Per essere *mn* una linea d'equilibrio, la spinta orizzontale è costante in tutti i punti dell'arco dalla chiave all'imposta, il valore della forza tangenziale T in *m* è:

$$tm = \sqrt{\{(ts)^2 + (sm)^2\}},$$

quindi:

$$T = \sqrt{\{H^2 + V^2\}} = H\sqrt{\{1 + \text{tang.}^2\alpha\}} = V\frac{1}{\cos.\alpha} \quad \text{(II)},$$

nella quale, V rappresenta il peso, che sopporta l'arco, dalla chiave al punto che si considera.

Noti i valori di V e di H per le diverse sezioni, sarà facile determinare l'asse del vôlto in modo che i suoi conci sieno diretti normalmente alle forze T che li sollecitano (*Fig.* 71).

Sia DC lo spessore del vôlto nella chiave, n il suo punto di mezzo, si tiri per n la orizzontale nX, si prenda $nv_1 = H$, si conduca la verticale $n_1v_1 = p_1$, la retta nn_1 sarà la posizione del primo archetto dell'asse linea di equilibrio; per n_1 si tiri la orizzontale $n_1v_2 = nv_1 = H$ e per v_2 la verticale $n_2v_2 = p_1 + p_2$, la retta n_1n_2 sarà il secondo archetto dell'asse dell'arco; analogamente si potranno segnare gli archetti n_2n_3, n_3n_4 ecc. fino all'imposta dell'arco.

Gli angoli, che questi archetti formano coll'orizzontale, vengono dati dalle seguenti equazioni:

$$\text{tang.}\beta_1 = \frac{p_1}{H}, \quad \text{tang.}\beta_2 = \frac{p_1 + p_2}{H}, \quad \text{tang.}\beta_3 = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{H}.$$

Prendendo per assi le rette ortagonali nX, nY, le ordinate dei punti n_1, n_2, n_3 . . . , saranno n_1v_1, $n_1v_1 + n_2v_2$, $n_1v_1 + n_2v_2 + n_3v_3$, . . .

Conosciuti di posizioni i punti dell'asse, si potrà facilmente tracciare e la direttrice dell'estradosso e quella dell'intradosso.

PARTE SECONDA

APPLICAZIONI

CAPITOLO I.

COSTRUZIONI IN LEGNO ED IN FERRO.

§ 63. **Cenni generali intorno alle ricerche sopra l'equilibrio delle costruzioni in legno ed in ferro.** — Tali ricerche si riducono ai seguenti problemi:

1° Calcolare i valori delle forze, che cimentano le resistenze alla estensione, alla compressione od alla flessione nelle parti di una costruzione, per trovarne le dimensioni delle loro sezioni trasversali.

2° Determinare la direzione della risultante delle forze, che agiscono sopra ciascun membro di una costruzione, per potere disporre tutte le sue parti in posizione di equilibrio.

3° Trovare la spinta orizzontale e la pressione verticale della costruzione sopra gli appoggi, che devono resistere all'azione e della prima e della seconda.

Per calcolare le reazioni degli appoggi, si suppongono sostituiti da forze, che ne producano lo stesso effetto.

Per applicare le equazioni di stabilità ad una delle parti componenti una costruzione, si scompone ciascuna delle forze, che agiscono sopra di essa in due componenti, una parallela, l'altra normale all'asse della parte, che si considera; la somma delle componenti parallele allunga od accorcia le sue fibre, quella delle componenti ortogonali ne produce l'incurvamento.

Se le parti componenti una costruzione, fatta astrazione dall'attrito, dalla coesione delle malte sono in equilibrio, se il sistema giace in un piano verticale ed appoggia sopra due sostegni, la spinta orizzontale è costante in tutti i punti e la pressione verticale sopra ciascun appoggio risulta dalla metà della somma del carico e del sovracarico.

Articolo I. — Semplici composizioni di travi in legno, connessione di lastre e spranghe in ferro.

§ 64. Semplici composizioni di travi in legno. —

I° Le tre travi AC, AB e DE, disposte nel modo indicato dalla figura 72, cioè l'una orizzontale, la seconda verticale e la terza inclinata debbono sopportare nel punto C il peso P; si vogliono conoscere la direzione e l'intensità degli sforzi estrinseci, che sollecitano ciascuna delle dette travi, per determinare le aree delle loro sezioni trasversali.

Poniamo:

l, t, d ed h le lunghezze AC, ED, AD ed AE,

α l'angolo EDA,

T lo sforzo, che sollecita DE nella direzione del suo asse,

q, q' e q'' le componenti orizzontali,

p, p' e p'' quelle verticali delle forze estrinseche applicate nei punti D, A ed E.

Gli appoggi D ed A possono essere sostituiti dalle loro reazioni; rispetto alla trave AC per l'equilibrio dovranno avere luogo le equazioni:

$$q - q' = 0 \qquad (1),$$

$$P + p' - p = 0 \qquad (2),$$

$$Pl - pd = 0 \qquad (3).$$

Rispetto alla ED risulta:

$$q - q'' = 0 \qquad (4),$$

$$p - p'' = 0 \qquad (5),$$

$$q''h - p''d = 0 \qquad (6).$$

Dalle quali si ottiene:

$$p = p'' = \frac{Pl}{d} \qquad \text{(I)},$$

$$p' = p - P = P\,\frac{l - d}{d} \qquad \text{(II)},$$

$$q = q' = q'' = \frac{p''d}{h} = \frac{Pl}{h} \qquad \text{(III)}.$$

Ora $d = t \cos.\alpha$, quindi:

$$p = p'' = \frac{Pl}{t \cos.\alpha} \qquad \text{(IV)}.$$

La risultante delle forze q e p, ossia:

$$T = \frac{p}{\text{sen}.\alpha} = \frac{2Pl}{t\,\text{sen}.2\alpha} \qquad \text{(V)}.$$

Ora il minimo valore di T corrisponde al massimo di sen.2α, ossia la saetta ED riceve la minima pressione, quando è egualmente inclinata alla verticale ed alla orizzontale. La sezione trasversale della saetta compressa dalla forza T avrà l'area:

$$A = \frac{T}{K_2}(1 + \tau) = \frac{2Pl}{K_2 t\,\text{sen}.2\alpha}(1 + \tau) \qquad \text{(VI)}.$$

La parte AD della trave orizzontale, tesa dalla forza $\frac{Pl}{h} = \frac{Pl}{t\,\text{sen}.\alpha}$, avrà la sezione trasversale

$$F = \frac{Pl}{K_1 t\,\text{sen}.\alpha} = \frac{Pl}{K_1 h} \qquad \text{(VII)}.$$

Rispetto alla trave verticale AB, la parte EA viene tesa da forza diretta verso l'alto, e la parte EB viene compressa; facile sarà il determinare le dimensioni delle loro sezioni trasversali.

Esempio. Poniamo $P=2000$ chilogrammi, $l=1^m,20$, $d=1,00$, $\alpha=45°$; si avrà: $p=p''=2400$ chilogrammi, $p'=400$ chilogr., $q=q'=q''=2400$ chilogrammi, $T=3404$, i quali valori serviranno per trovare le dimensioni delle sezioni delle travi.

II° Una trave verticale AB (*Fig.* 73) connessa saldamente alla orizzontale CB e rinforzata dalla saetta CD, sopporta in A la forza orizzontale P; determinare le direzioni e le intensità delle forze, che agiscono sopra ciascuna parte di questa composizione di travi.

Poniamo.

l, d, h e t le lunghezze dei tratti AD, DB, CB e CD,

q, q' e q'' le componenti orizzontali,

p, p' e p'' quelle delle forze applicate nei punti D, B e C,

α l'angolo della saetta CD colla verticale.

Per l'equilibrio $q.BD=P.AB$, per essere $BD=d=t\cos.\alpha$, $AB=l$, si ottiene:

$$q=\frac{Pl}{t\cos.\alpha} \qquad \text{(VIII)}.$$

Scompongasi la forza in due componenti una T diretta secondo DC, l'altra p diretta verticalmente, si avrà:

$$T=\frac{q}{\text{sen}.\alpha}=\frac{2Pl}{t\,\text{sen}.2\alpha} \qquad \text{(IX)},$$

$$p=q\,\text{cotg}.\alpha=\frac{Pl}{t\,\text{sen}.\alpha} \qquad \text{(X)}.$$

Si trasporti la forza T in C, la si scomponga nelle componenti p'' e q'', risulta:

$$q''=T\,\text{sen}.\alpha=\frac{Pl}{t\cos.\alpha}=q \qquad \text{(XI)},$$

$$p''=T\cos.\alpha=\frac{Pl}{t\,\text{sen}.\alpha}=p \qquad \text{(XII)}.$$

Rispetto alla trave AB devono avere luogo le equazioni:

$$P+q-q'=0,$$

da cui:

$$q' = P + q = P\frac{l + d}{d} \qquad \text{(XIII)},$$

e

$$p' = p = p'' \qquad \text{(XIV)}.$$

La saetta è sottoposta alla compressione dalla forza T.

La parte AD del ritto verticale si può considerare come una trave incastrata nell'estremità D e sollecitata nell'altra da una forza normale al suo asse.

L'altra parte BD è sollecitata alla estensione dalla forza verticale p'.

Colle formole date nella *Resistenza dei Materiali*, si potranno determinare le aree delle sezioni trasversali delle parti.

III° Una trave orizzontale BD (*Fig.* 74), incastrata alle due estremità tra due travi orizzontali, porta nel mezzo la trave verticale AC, che è sollecitata in A dalla forza orizzontale H, posta nel piano verticale passante per BD.

Si domandano i valori di V e V' pressioni verticali, e di Q, Q_1, spinte orizzontali applicate nei punti B e D.

Chiaminsi l, Y le lunghezze delle travi BD ed AC.

Per l'equilibrio del sistema si ha:

$$Q' = Q = H \qquad \text{(XV)}$$

$$HY - Vl = 0,$$

da cui:

$$V = \frac{HY}{l} \qquad \text{(XVI)}.$$

La forza V' è diretta dal basso all'alto, quindi:

$$HY + V'l = 0,$$

da cui:

$$V' = -\frac{HY}{l} \qquad \text{(XVII)}.$$

Due puntoni AB, AD (*Fig.* 75) connessi alle estremità della catena BD si trovano sollecitati dalla forza orizzontale H applicata nel vertice comune A, si domandano i valori delle pressioni verticali e delle spinte orizzontali sopportate dai punti B e D.

Poniamo:

$$l = AB = AD, \quad Y = AC, \quad X = BC, \quad \alpha = BAC.$$

Scompongasi la forza H in due componenti, una t diretta secondo l'asse di AD, l'altra t' diretta secondo il prolungamento di AB.

Per essere i puntoni egualmente inclinati alla verticale, si ha:

$$t = t' = \frac{H}{2\,\text{sen.}\alpha} = \frac{Hl}{2X} \qquad \text{(XVIII)}.$$

La spinta orizzontale

$$Q = t\,\text{sen.}\alpha = \frac{Hl\,\text{sen.}\alpha}{2X} = \frac{1}{2}H \qquad \text{(XIX)}.$$

La pressione verticale

$$V = t\cos.\alpha = \frac{Hl\cos.\alpha}{2X} = \frac{HY}{2X} \qquad \text{(XX)}.$$

In modo analogo si troverà:

$$Q' = Q = \frac{1}{2}H \qquad \text{(XXI)},$$

$$V' = V = \frac{HY}{2X} \qquad \text{(XXII)}.$$

§ 65. **Connessione di lastre e spranghe in ferro.** — Due spranghe in ferro di sezione rettangolare sovrapposte nelle loro estremità e riunite da una fila per es. di tre chiodi (*Fig.* 76) sono stirate dalle forze P, dirette parallelamente alla faccia di contatto *bb*.

Sotto l'azione di tali sforzi, nella sezione *aa* vien cimentata la resistenza all'estensione, nella sezione trasversale dei chiodi invece si sviluppa la resistenza allo scorrimento quando sia vinta la forza di attrito prodotta tra lamina e lamina dal raffreddamento dei chiodi ribaditi a caldo.

Supponiamo che i tre chiodi abbiano eguale diametro, e presentino contemporaneamente alla rottura eguale resistenza

$$S = \frac{1}{3} P \qquad (1).$$

Consideriamo la sezione *ad* (*Fig.* 77), il tratto *ed* della spranga superiore presenta in *d* una tensione

$$Z_d = 2S = \frac{2}{3} P;$$

il tratto Q*a* (*Fig.* 78) della spranga inferiore presenta in *a* una tensione

$$Z_a = \frac{2}{3} P.$$

La somma delle resistenze sviluppate nelle sezioni *a*, *d* e nel chiodo intermedio deve eguagliare la forza P, quindi:

$$Z_a + Z_d - S = P \qquad (2),$$

la quale si cambia in una identità, quando si pongano i loro valori per Z_a, Z_d ed S.

Ora si osserva che per la spranga inferiore le sezioni poste tra il 1° ed il 2° chiodo di destra devono sopportare una tensione $= \frac{1}{3}$ P; quelle tra il 2° e 3° sono sotto l'azione della forza $\frac{2}{3}$ P, la sezione della spranga, che passa per l'asse del 3° chiodo, deve resistere alla forza P, quindi questa è la sezione più pericolosa della spranga, la sua area dovrà essere determinata in modo da presentare una forza di resistenza superiore alla P, come la sezione trasversale del chiodo deve resistere allo sforzo di $\frac{1}{3}$ P.

Due spranghe poste l'una di seguito all'altra, riunite da un coprigiunto sono sotto l'azione delle forze P (*Fig.* 79), che ci-

mentano in esse la resistenza all'estensione. La rottura può avere luogo o nel coprigiuuto, o nelle spranghe, o nei chiodi.

La sezione più pericolosa del coprigiunto è la *aa*, mentre la sezione *ss* è la più pericolosa della spranga di destra. Ogni chiodo poi deve resistere allo sforzo costante $\frac{1}{n}$ P, essendo *n* il numero dei chiodi, che uniscono ciascuna spranga al coprigiunto.

Esprimiamo con

b la larghezza della spranga,

b' la larghezza del coprigiunto,

t lo spessore della lastra,

t' quello del coprigiunto,

d il diametro del chiodo,

K_1 il coefficiente di resistenza del ferro alla rottura per estensione riferita all'unità di area,

K_3 il coefficiente di resistenza dei chiodi alla rottura per scorrimento trasversale riferito all'unità di area.

Per l'equilibrio avranno luogo le equazioni:

$$K_1 = \frac{P}{(b-d)\,t} \qquad \text{(I)},$$

$$K_1 = \frac{P}{(b'-d)\,t'} \qquad \text{(II)},$$

$$K_3 = \frac{1}{n}\,\frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} \qquad \text{(III)}.$$

Se le spranghe sono riunite con due coprigiunti posti, l'uno al disopra, l'altro al disotto (*Fig.* 80), allora due sezioni nei chiodi presenteranno resistenze allo sforzo, che tende a romperli per scorrimento, e le eguaglianze precedenti si ridurranno in questo caso alle seguenti:

$$K_1 = \frac{P}{(b-d)\,t} \qquad \text{(I)}_a,$$

$$K_1 = \frac{\frac{1}{2}P}{(b'-d)\,t'} \qquad \text{(II)}_a,$$

$$K_3 = \frac{1}{2n} \frac{P}{\frac{1}{4}\pi d^2} \qquad \text{(III)}_a$$

Se tre sono le sezioni cimentate del chiodo, allora tripla sarà la resistenza, così la resistenza sarà proporzionale al numero delle sezioni, nelle quali tende ad avere luogo contemporaneamente la rottura.

Le molte ed accurate esperienze eseguite hanno fatto conoscere che il coefficiente K_3 di resistenza dei chiodi è $= \frac{3}{4} K_1$.

Per essere i chiodi formati del ferro di migliore qualità, si prende dai pratici $\frac{K_3}{K_1} = 1$.

Nelle connessioni di lamine in ferro di dato spessore con coprigiunti mediante chiodi ribaditi è necessario conoscere una relazione tra il loro diametro, il loro numero e la loro distanza.

Esprimendo con P (*Fig.* 81) la forza, che sollecita una striscia di lamina di larghezza $b =$ distanza tra fila e fila di chiodi, e con t lo spessore della lamiera, si avrà;

$$K_1 = \frac{P}{(b-d)\,t}$$

$$K_3 = \frac{1}{n} \frac{P}{\frac{1}{4}\pi d^2}$$

dalle quali:

$$(b-d)\,t = \frac{K_3}{K_1}\, n \,\frac{\pi}{4}\, d^2$$

da cui:

$$d = \frac{K_1}{K_3} \frac{2}{n\pi} \left\{ -t \pm \sqrt{ \left\{ \frac{n\pi}{\frac{K_1}{K_3}}\, bt + t^2 \right\} } \right\} \qquad \text{(IV)}.$$

Se due sono le sezioni di chiodo cimentate, allora il diametro

$$d = \frac{K_1}{K_3} \frac{1}{2n\pi} \left\{ -t \pm \sqrt{ \left\{ \frac{2n\pi}{\frac{K_1}{K_3}} bt + t^2 \right\} } \right\} \qquad (V).$$

Nelle (IV) e (V) vi sono le quantità b, d e t, quando sieno note due di queste, si potrà trovare il valore della terza.

Dalla (III) si vede che per dato valore di d, la distanza b è inversamente proporzionale allo spessore t della lamiera; le quantità b e t vengono praticamente legate, nel caso di una sola sezione di chiodo cimentata, dalla relazione

$$25, td \geqq \frac{\pi d^2}{4},$$

la quale si cambia in

$$2{,}5 dt \geqq 2 \frac{\pi d^2}{4},$$

quando due sono le sezioni resistenti del chiodo.

Esempio 1° Le lamiere a, a_1, b, b_1 siano riunite mediante i coprigiunti cc, c_1c_1, che hanno lo spessore $t = 1{,}5$ centimetri delle lamiere.

Poniamo la distanza $b = 15$ centimetri, $n = 3$, $\frac{K_1}{K_3} = 1$.

Venendo contemporaneamente sviluppata la resistenza alla rottura in due sezioni di ciascun chiodo, il loro diametro

$$d = \frac{2}{6\pi} \left\{ -3 \pm \sqrt{ \left\{ 6.\pi.3.15 + 3^2 \right\} } \right\} = 2{,}79 \text{ centimetri.}$$

Se ω è la sezione trasversale della lamiera per i fori praticati in essa, la parte resistente risulterà:

$$\frac{b - d}{b} \omega = 0{,}814\, \omega.$$

Esempio 2° Nel caso indicato dalla figura 83 il coprigiunto abbia lo spessore $t = 1{,}5$ delle lamiere. Poniamo:

$$b = 15, \quad n = 3, \quad \frac{K_1}{K_3} = 1.$$

Essendo nel chiodo cimentata una sola sezione, il suo diametro

$$d=\frac{2}{3\pi}\left\{-1,5\pm\sqrt{\left\{3\pi.1,5.15+\overline{1,5}^2\right\}}\right\}=2,79 \text{ centimetri},$$

valore eguale al trovato nell'esempio precedente, il che potevasi prevedere, dovendo una sezione di chiodo sopportare metà dello sforzo, che ne cimentava due.

Esempio 3° Sia il caso indicato dalla figura 84, i due coprigiunti abbiano uno spessore metà di quello della lamiera, i chiodi presentino due sezioni alla resistenza, quindi il loro diametro:

$$d=\frac{2}{6\pi}\left\{-1,5\pm\sqrt{\left\{6\pi.1,5.15+\overline{1,5}^2\right\}}\right\}=2,03 \text{ centimetri}.$$

Se ω è la sezione della lamiera, per i fori praticati svilupperà resistenza soltanto la sezione:

$$\frac{12,97}{15}\,\omega=0,865\,\omega.$$

Articolo II. — Delle travi armate.

§ 66. Trave, la quale appoggiata alle due estremità e sollecitata da un peso uniformemente distribuito nella sua lunghezza, viene sostenuta nel mezzo dall'incontro di due saette. — Data la trave AB (*Fig.* 85), appoggiata nelle due estremità, caricata di un peso p per ogni unità di lunghezza e sostenuta nel mezzo dalle due saette DC e DE, trovarne:

a) le reazioni degli appoggi A, B e D,

b) le equazioni di stabilità per la trave AB e per le saette DC e DE,

c) la spinta orizzontale e la pressione verticale delle saette DC e DE contro il muro.

Chiaminsi:

Q', Q'' e Q le pressioni, che sopportano gli appoggi estremi e l'intermedio D,

l la lunghezza della trave,

α l'inclinazione delle saette DC, DE colla verticale.

Nel § 31 si è trovato:

$$Q' = Q'' = \frac{3}{16}\,pl \qquad \text{(I)},$$

$$Q = \frac{5}{8}\,pl \qquad \text{(II)}.$$

Scomponiamo la forza $\frac{1}{2}$ Q in due componenti, una orizzontale q, l'altra t diretta secondo l'asse di DC, si avrà:

$$q = \frac{1}{2}\,\frac{5}{8}\,pl \text{ tang.}\alpha \qquad (1),$$

$$t = \frac{1}{2}\,\frac{5}{8}\,\frac{pl}{\cos.\alpha} \qquad (2),$$

la prima è la spinta orizzontale reciproca delle due saette in D, la seconda è il valore della forza, che cimenta la resistenza alla pressione nelle saette DC e DE, perciò la loro sezione trasversale:

$$A = (1+\gamma)\,\frac{t}{K_2} \qquad \text{(III)}.$$

La saetta DC esercita in C contro il muro la spinta orizzontale:

$$q' = t \text{ sen.}\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{5}{8}\,pl \text{ tang.}\,\alpha \qquad (3),$$

e la pressione verticale:

$$V = t \cos.\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{5}{8}\,pl \qquad (4).$$

La trave AB si può considerare come un prisma orizzontale, sollecitato nei punti estremi dalle forze verticali Q' e Q'' eguali, dirette dal basso all'alto e nel punto intermedio dalla Q diretta pure dal basso all'alto, e caricato di uu peso pl uuiformemente distribuito nella sua lunghezza l.

Il momento statico delle forze estrinseche rispetto al centro di una sezione qualunque G posta a distanza x dall'estremo A è:

$$M = \frac{3}{16}\, pl.x - \frac{1}{2}\, px^2 \qquad \text{(IV)}.$$

Per la stabilità il momento M deve eguagliare, oppure essere minore del momento W di resistenza della sezione della trave, ossia:

$$\frac{3}{16}\, plx - \frac{1}{2}\, px^2 = W \qquad \text{(V)}.$$

Il momento inflettente rispetto alla sezione di mezzo, che è la più pericolosa, è:

$$M = \frac{1}{32}\, pl^2,$$

quindi l'equazione di stabilità per la trave AB risulta:

$$\frac{1}{32}\, pl^2 = W = \frac{RT}{\frac{1}{2}h} \qquad \text{(VI)},$$

nella quale, T esprime il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse orizzontale passante per il centro di gravità, R il coefficiente di resistenza alla rottura riferito all'unità di area.

Se la sezione trasversale della trave è rettangolare di base b, di altezza h, allora:

$$W = \frac{1}{6}\, RFh,$$

e dalla (VI) risulta:

$$\frac{1}{32}\, pl^2 = \frac{1}{6}\, RFh,$$

da cui:

$$F = \frac{6}{32}\, \frac{pl^2}{Rh} = \frac{3}{16}\, \frac{pl^2}{Rh} \qquad \text{(VII)}.$$

Esempio. Il parallelepipedo AB di larice, appoggiato alle due estremità poste alla distanza di 10^m, è rinforzato nel mezzo dalla trave orizzontale CD lunga 4^m, contro gli estremi C e D della quale agiscono le saette CM, DN fermate ai muri AX, BY (*Fig.* 86).

La trave debba sostenere un peso di 1500 chilogrammi per ogni metro corrente; si domandano:

a) i valori delle reazioni Q, Q', Q'',

b) i valori delle forze t, q' V,

c) le dimensioni delle sezioni trasversali delle travi AB, CM e DN.

Poniamo l'angolo $\alpha = 45°$, e la sezione trasversale di AB ossia:

$$F = bh = \frac{3}{4} h^2,$$

essendo la base b del rettangolo eguale a $\frac{3}{4}$ dell'altezza h.

Ora $p = 1500$, $l = 10^m$, quindi dalle (I) e (II) si ha:

$$Q' = Q'' = \frac{3}{16}\, 1500.10 = 2812{,}5 \text{ chilogrammi,}$$

$$Q = \frac{5}{8}\, 1500.10 = 9375 \text{ chilogrammi.}$$

Dalla (VII) l'area

$$F = \frac{3}{4} h^2 = \frac{6}{32}\, \frac{15}{50h},$$

ponendo R = 50 chilogrammi per c.m.q., quindi:

$$h^3 = \frac{4}{3}\, \frac{6}{32}\, \frac{15}{50} = 0{,}075,$$

da cui:

$$h = 0{,}42,$$

$$b = \frac{3}{4} h = 0{,}31.$$

La trave AB dovrà avere per sezione trasversale un rettangolo di base $b = 0{,}31$ e di altezza $h = 0^m{,}42$.

Nella saetta CM, come nella DN viene cimentata la resistenza alla compressione da una forza

$$t = \frac{1}{2}\,\frac{5}{8}\,\frac{1500.10}{\cos.45^\circ} = 6615 \text{ chilogrammi.}$$

La loro sezione trasversale rettangolare di base $b = 0{,}261$ e di altezza h, ponendo il coefficiente $K_1 = 20$ chilogrammi per c.m.q. è data da

$$0{,}261\,h = \frac{6615}{200000}\,,$$

da cui:

$$h = 0{,}126.$$

Le saette esercitano contro i muri di appoggio una spinta orizzontale

$$q' = \frac{1}{2}\,\frac{5}{8}\,1500.10.\ \text{tang}.\,45^\circ = 4687{,}5 \text{ chilogrammi.}$$

ed una pressione verticale

$$V = \frac{1}{2}\,\frac{5}{8}\,1500.10 = 4687{,}5 \text{ chilogrammi.}$$

§ 67. Trave armata con un tirante ed una saetta. — Sia la trave AB (*Fig.* 87) armata con un tirante ed una saetta, appoggiata alle due estremità e caricata di un peso uniformemente distribuito nella sua lunghezza.

Poniamo:

p il peso distribuito sopra ciascuna unità di lunghezza,
l la lunghezza della trave,
T la tensione del tirante,
Q, Q′ e Q″ le reazioni degli appoggi C, B e A,
α l'angolo CBD = CAD.

La trave AB appoggiata nei punti A, B e C eserciterà sopra il sostegno CD una pressione

$$Q = \frac{5}{8} pl,$$

la sezione trasversale di questo avrà l'area:

$$A = \frac{5}{8} \frac{pl}{K_2} \qquad \text{(I).}$$

Ciascun appoggio svilupperà una reazione:

$$Q' = Q'' = \frac{1}{2} pl \qquad \text{(II).}$$

La somma delle componenti verticali delle forze, che sollecitano la trave AB deve essere $=0$ per l'equilibrio, quindi:

$$\frac{1}{2} pl + \frac{1}{2} pl - pl + \frac{5}{8} pl - 2T \operatorname{sen.}\alpha = 0,$$

da cui:

$$T = \frac{5}{8} \frac{pl}{2 \operatorname{sen.}\alpha} \qquad \text{(III).}$$

Venendo nel tirante ADB cimentata la resistenza alla estensione dalla forza T, la sua sezione trasversale avrà l'area:

$$A_1 = \frac{T}{K_1} = \frac{5}{8} \frac{pl}{2 \operatorname{sen.}\alpha} \frac{1}{K_1} \qquad \text{(IV).}$$

Nella trave AB vien cimentata la resistenza alla flessione da forze, la cui risultante è obliqua all'asse.

Ora nel § 38 si è trovato l'equazione di stabilità:

$$R = \frac{Q}{F} + \frac{h}{2T} M \qquad (1),$$

nella quale:

Q è la somma delle componenti orizzontali delle forze estrinseche,

F è l'area della sezione trasversale della trave,

T è il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse orizzontale passante per il centro di gravità della sezione,

M è il momento statico delle forze estrinseche rispetto ad una sezione,

h è l'altezza della sezione.

Nel nostro caso:

$$Q = T \cos.\alpha = \frac{5}{16} \frac{pl}{\text{tang}.\alpha} \qquad (2),$$

$$M_m = \frac{1}{32} pl^2.$$

Ponendo tali valori nella (1), si avrà:

$$R = \frac{1}{F} \frac{5}{16} \frac{pl}{\text{tang}.\alpha} + \frac{h}{2T} \frac{1}{32} pl^2 \qquad (V),$$

la quale si presta a determinare una delle dimensioni della sezione trasversale della trave AB.

Per sezione rettangolare di base b e di altezza h il momento d'inerzia:

$$T = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} Fh^2.$$

Ponendo tale valore nella (V), si avrà:

$$R = \frac{1}{F} pl \left\{ \frac{5}{16} \frac{1}{\text{tang}.\alpha} + \frac{6}{32} \frac{l}{h} \right\},$$

da cui:

$$F = \frac{1}{R} pl \left\{ \frac{5}{16} \frac{1}{\text{tang}.\alpha} + \frac{6}{32} \frac{l}{h} \right\} \qquad (VI).$$

Esempio. Una guida Vignole avente l'altezza di 125^{mm}, la larghezza del fungo superiore di 62^{mm}, la larghezza della base di 105^{mm}, lo spessore del gambo di 17^{mm}, appoggiata alle due estremità e caricata di un peso uniformemente distribuito nella sua lunghezza, è connessa alle due estremità ad un'altra guida incurvata colla concavità rivolta verso l'alto. Le due guide sono nel mezzo collegate con un sostegno (*Fig.* 88).

Ponendo 3^{m} la distanza degli appoggi, 37 chilogrammi il peso per metro corrente della guida, 7788 il peso del m.c. di ferro, 3000 chilogrammi il peso distribuito sopra ogni metro corrente della guida, si domandano:

a) i valori delle reazioni degli appoggi e degli sforzi, che devono sopportare le parti componenti la trave armata,

b) la resistenza R, che deve sopportare il m.m.q. di sezione e della guida rettilinea e di quella incurvata.

Ora i dati del problema sono:

$$p = 3000 \text{ chilogrammi}, \quad l = 4^{m},00, \quad \alpha = 10^{\circ},$$

$$F = \frac{37}{7788} = 0^{m.q.},0047509.$$

Il sostegno di mezzo viene compresso dalla forza:

$$Q = \frac{5}{8} 3000.3 = 5625 \text{ chilogrammi}.$$

Gli appoggi devono sopportare la pressione verticale:

$$Q' = Q'' = \frac{1}{2} 9000 = 4500 \text{ chilogrammi}.$$

Nel tirante ossia nella guida incurvata viene cimentata la resistenza all'estensione della forza:

$$T_x = \frac{5}{8} \frac{9000}{2 \,\text{sen.}\, 10^{\circ}} = \frac{2812}{0,173} = 16254 \text{ chilogrammi},$$

quindi in ogni m.m.q. di sezione della guida incurvata verrà cimentata la resistenza:

$$R = \frac{16254}{4750,9} = 3,^{\text{chilogr.}}42.$$

Ora il momento inflettente rispetto alla sezione di mezzo è:

$$M = \frac{1}{32} 3000 . 3^2 = 843{,}75.$$

La componente orizzontale di T_x è:

$$T_x \cos.\alpha = 16254 . \cos.10^\circ = 15928{,}92.$$

Il momento d'inerzia della sezione è $= 0{,}0000098$, dunque la resistenza, che sopporterà l'unità di area della sezione della guida rettilinea risulta:

$$R = \frac{15928{,}92}{0{,}0047509} + \frac{0{,}125 . 843{,}75}{2 . 0{,}0000098} =$$

$$= 3353456 + 5380612 = 8734068 \text{ chilogrammi per m.q.}$$

Potendo il ferro sopportare uno sforzo di 36 chilogrammi per m.m.q. senza rompersi, il coefficiente di resistenza della guida rettilinea si ottiene dal rapporto:

$$\frac{8734068}{36000000} = \frac{100}{412} = 0{,}2427.$$

Articolo III. Delle armature e dei cavalletti poligonali.

§ 68. **Cavalletto triangolare composto di due puntoni e di una catena.** — Sia il cavalletto ABD, i cui puntoni AD ed AB caricati uniformemente nella loro lunghezza l sono inclinati di un angolo α alla verticale (*Fig.* 89).

Poniamo:

$AC = Y$, $BC = X$,

V la pressione verticale negli appoggi,

Q la spinta orizzontale costante in ogni punto del puntone,

T_x la pressione diretta secondo l'asse di AD o di AB,

p il carico sopportato dall'unità di lunghezza di ciascun puntone.

Ora AB ed AD si possono considerare come travi, le quali appoggiate nel vertice A ad una parete verticale, e connesse nell'altro estremo stabilmente ad un sostegno vengono caricate di un peso uniformemente distribuito nella loro lunghezza.

Dalle equazioni trovate nel § 42, si ha:

$$Q = \frac{1}{2} pl \operatorname{tang.} \alpha = \frac{1}{2} pl \frac{X}{Y} \qquad (I),$$

$$V = pl \qquad (II),$$

$$T_x = \frac{p}{2 \cos. \alpha} (l \operatorname{sen.}^2 \alpha + 2x \cos.^2 \alpha) \qquad (III).$$

Per $x = \frac{1}{2} l$.

$$T_{\frac{1}{2} l} = \frac{pl}{2 \cos. \alpha} = \frac{pl^2}{2Y} \qquad (IV),$$

la sezione trasversale del puntone avrà l'area:

$$F = \frac{1}{R} \left\{ \frac{pl}{2 \cos. \alpha} + \frac{hF}{2T} \frac{1}{8} pl^2 \operatorname{sen.} \alpha \right\} \qquad (V).$$

Se la sezione è rettangolare di base b e di altezza h, si avrà:

$$bh^2 = \frac{pl}{R} \left\{ \frac{h}{2 \cos. \alpha} + \frac{3}{4} l \operatorname{sen.} \alpha \right\} = \frac{pl}{R} \left\{ \frac{hl}{2Y} + \frac{3}{4} X \right\} \qquad (VI).$$

La catena BD si può considerare come una trave appoggiata alle due estremità, caricata di un peso $2Xq$ uniformemente distribuito sulla sua lunghezza e sollecitata dalla forza orizzontale Q; la sua sezione avrà l'area:

$$F_1 = \frac{1}{R} \left\{ \frac{1}{2} pl \frac{X}{Y} + \frac{hF_1}{2T} (X - \frac{1}{2} x) qx \right\} \qquad (VII),$$

nella quale il termine $\frac{1}{2} pl \frac{X}{Y}$ è il valore della spinta orizzontale Q, e $qx\ (X - \frac{1}{2} x)$ è il momento e del peso distribuito nella lunghezza x, e della reazione dell'appoggio rispetto alla sezione posta a distanza x da un estremo.

Se la sezione è rettangolare di base b e di altezza h, si ottiene:

$$bh^2 = \frac{X}{R}\left\{\frac{plh}{2Y} + 3qX\right\} \qquad \text{(VIII)}.$$

Esempio. Poniamo: $2X = 6^m$, $Y = 1^m,70$, $p = 500$ chilogrammi ed $l = 3^m,45$, si avrà:

$$Q = 1522 \text{ chilogrammi}, \qquad V = 1725 \text{ chilogrammi}.$$

Ciascun puntone di legno avrà per sezione trasversale un quadrato di lato $0^m,25$; e la catena colle stesse dimensioni potrà sopportare un peso di 250 chilogrammi per ogni metro corrente.

§ 69. **Cavalletto composto di due puntoni, di un monaco e di una catena** (*Fig.* 90). — Poniamo:

2P il peso che deve sopportare il monaco,

p il carico distribuito sopra ogni unità di lunghezza del puntone,

α l'angolo di inclinazione di ciascun puntone colla verticale.

Adottiamo le denominazioni poste nel precedente paragrafo.

Sopra ciascun appoggio si eserciterà una pressione verticale:

$$V = P + pl \qquad \text{(I)},$$

e una spinta orizzontale:

$$Q = (P + \frac{1}{2}pl) \operatorname{tang}.\alpha \qquad \text{(II)}.$$

Dal § 42 si avrà:

$$T_x = \frac{P}{\cos.\alpha} + \frac{p\,(l \operatorname{sen}.^2\alpha + 2x \cos.^2\alpha)}{2 \cos.\alpha} \qquad \text{(III)}.$$

Il momento statico delle forze estrinseche, che agiscano sopra un puntone rispetto ad una sua sezione posta a distanza x da un estremo, dalla (IX) del § 42, risulta:

$$M_x = \frac{1}{2}\,px \operatorname{sen}.\alpha\,(l - x).$$

Ponendo per T_x e per M_x i loro valori nella (V) del § 41, risulta per la sezione trasversale del puntone l'area:

$$F=\frac{1}{R}\left[\frac{2P+(l\ \text{sen.}^2\alpha+2x\cos.^2\alpha)p}{2\cos.\alpha}+\frac{hF}{2T}\ \frac{1}{2}px\ \text{sen.}\alpha\,(l-x)\right] \qquad \text{(IV)}.$$

La sezione di mezzo del puntone avrà l'area:

$$F=\frac{1}{R}\left\{\frac{2P+pl}{2\cos.\alpha}+\frac{hF}{2T}\ \frac{1}{8}pl^2\ \text{sen.}\alpha\right\}=$$

$$=\frac{l}{R}\left[\frac{2P+pl}{2Y}+\frac{hF}{2T}\ \frac{1}{8}pX\right] \qquad \text{(V)}.$$

Se il puntone è di sezione rettangolare di base b, e di altezza h, allora:

$$F_1=bh=\frac{l}{R}\left\{\frac{2P+pl}{2Y}+\frac{3}{4}\ \frac{pX}{h}\right\} \qquad \text{(VI)}.$$

La catena BD, caricata del peso $q\,(2X)$ uniformemente distribuito sulla sua lunghezza, è sostenuta nel mezzo dal monaco, quindi eserciterà sopra di esso uno sforzo verticale diretto dall'alto al basso, il cui valore venne nel § 31 trovato:

$$2P=\frac{5}{8}q\,(2X)=\frac{5}{4}qX,$$

da cui:

$$P=\frac{5}{8}qX.$$

La sezione trasversale del monaco, nel quale viene cimentata la resistenza all'estensione dalla forza 2P avrà l'area:

$$F_2=\frac{5qX}{4K_1} \qquad \text{(VII)}.$$

Ponendo nella (II) per P il suo valore, si ottiene la spinta:

$$Q = \left(\frac{5}{8} qX + \frac{1}{2} pl\right) \text{tang.}\, \alpha.$$

Il massimo valore di M delle forze estrinseche, che sollecitano la catena rispetto ad una sua sezione, dal § 31 risulta:

$$M_m = \frac{1}{8} qX^2.$$

Ponendo per T_x e per M_m i loro valori l'area della sezione della catena sarà:

$$F_3 = \frac{X}{R} \left\{ \frac{5qX + 4pl}{8Y} + \frac{hF_3}{2T} \frac{1}{8} qX \right\} \qquad \text{(VIII)},$$

la sezione rettangolare:

$$bh = \frac{X}{R} \left\{ \frac{2qX + 4pl}{8Y} + \frac{3}{4} \frac{qX}{h} \right\} \qquad \text{(IX)}.$$

Se i puntoni non devono sopportare alcun sovraccarico, allora in essi verrà soltanto cimentata la resistenza alla compressione dalla forza

$$T_x = \frac{P}{\cos.\alpha}.$$

L'area della loro sezione trasversale sarà:

$$A = \frac{P}{K_2 \cos.\alpha} (1 + \gamma) \qquad \text{(X)}.$$

Esempio. Poniamo $X = 5^m$, $Y = 2{,}90$ e perciò $l = 5{,}78$. $p = 500$ chilogrammi, $q = 300$, si avrà:

$$P = 937{,}5, \quad V = 3827{,}5. \quad Q = 4107{,}7.$$

La sezione rettangolare del puntone di base $b = 0^m{,}26$ avrà l'altezza $h = 0^m{,}30$, e la catena colla sezione rettangolare di base $b = 0{,}26$, e di altezza $h = 0{,}20$ potrà sopportare per ogni metro di sua lunghezza il peso $q = 300$ chilogrammi.

§ 70. Armatura composta di una catena, di due puntoni, di due monaci e della sottocatena. — Si trovino gli sforzi, a cui sono sottoposti i membri componenti tale armatura e le dimensioni o l'area delle loro sezioni trasversali (*Fig.* 91).

Poniamo:

$$l = AB = A'D, \quad X = BC = DC', \quad Y = AC = A'C', \quad h = AA',$$

T_x la forza, che agisce secondo l'asse di ciascun puntone,
T la forza, che cimenta la resistenza alla compressione in AA',
Q la spinta orizzontale,
S la tensione, a cui è sottoposto ciascun monaco.

La pressione dell'armatura sopra ciascuno degli appoggi A, D è:

$$V = P + pl \qquad \text{(I)}.$$

Trovandosi i puntoni AB, A'D nelle stesse condizioni di quelli della figura 90, eserciteranno sopra la catena la spinta orizzontale:

$$Q = \left(P + \frac{1}{2}pl\right) \text{tang.}\alpha\,,$$

e la loro sezione trasversale avrà l'area:

$$F = \frac{l}{R} \left\{ \frac{2P + pl}{2Y} + \frac{hF}{2T} \frac{1}{8} pX \right\} \qquad \text{(II)}.$$

La sottocatena AA', trascurando l'azione del suo peso, è compressa dalla forza Q, quindi la sua sezione trasversale, dalla (IV) del § 51, risulterà di area:

$$F_1 = \frac{1+\gamma}{K_2} \left(P + \frac{1}{2}pl\right) \text{tang.}\alpha \qquad \text{(III)}.$$

Esprimiamo con q il peso distribuito sopra l'unità di lunghezza della catena, con L la lunghezza della catena, posto $X = \frac{1}{3}L$, dal § 32 si avrà:

$$S = \frac{11}{30} qL = \frac{11}{10} qX \qquad \text{(IV)},$$

e la sezione trasversale delle travi AC, A'C' avrà l'area:

$$F_2 = \frac{S}{K_1} = \frac{11}{10} \frac{qX}{K_1} \qquad (V).$$

Il tratto *cc'* della catena di lunghezza eguale o maggiore di X è la parte più pericolosa, e la sua sezione si potrà determinare considerandolo come una trave appoggiata alle due estremità *c*, *c'* e caricata di un peso *q.h* uniformemente distribuito sopra la sua lunghezza *h*, e sollecitato dalla forza orizzontale Q.

Ora il massimo momento statico è:

$$M = \frac{1}{8} qh^2.$$

Ponendo per M e per Q i loro valori, la sezione trasversale della catena avrà l'area:

$$F_3 = \frac{1}{R} \left\{ \left(P + \frac{1}{2} pl\right) \frac{X}{Y} + \frac{hF_3}{T} \frac{qh^2}{16} \right\} \qquad (VI).$$

Per sezione rettangolare di base *b* e di altezza *h*, si ha:

$$bh = \frac{1}{R} \left\{ \left(P + \frac{1}{2} pl\right) \frac{X}{Y} + \frac{3}{4} \frac{qh^2}{h} \right\} \qquad (VII).$$

§ 71. **Cavalletto composto di due puntoni, di una catena e di una sottocatena.** — Sia il cavalletto ABD (*Fig.* 92) composto dei puntoni AB, AD, connessi fra di loro nel vertice, alla sotto catena EF nei punti E ed F, ed alla catena BD negli estremi B e D.

Ciascun puntone è caricato di un peso *pl* uniformemente distribuito sopra la sua lunghezza *l*. Chiaminsi:

Q, Q', Q'' le spinte orizzontali del puntone AB nei punti A. E e B di appoggio,

t e *t'* le forze applicate nei punti E e B, dirette parallelamente all'asse del puntone,

V pressione del cavalletto sopra ciascuno degli appoggi B e D,

a l'angolo del puntone colla verticale AC.

d distanza di E dall'estremità A.

Il puntone AB è sostenuto dai tre appoggi A, E e B, le loro reazioni P, P' e P'' vengono date dalle seguenti equazioni:

$$P = \frac{d^2 + 3dl - l^2}{8d} p \qquad (1),$$

$$P' = \frac{l(l^2 + ld - d^2)}{8d(l-d)} p \qquad (2),$$

$$P'' = \frac{3l^2 - 5ld + d^2}{8(l-d)} p \qquad (3).$$

Scompongasi la forza verticale P in due componenti, una orizzontale Q, l'altra t diretta secondo l'asse del puntone, così la forza P' nelle componenti Q' e t'. Dai triangoli rettangoli Aca, Eed, si ottiene:

$$Q = P \operatorname{tang}.\alpha \qquad (I),$$

$$t = \frac{P}{\cos.\alpha},$$

$$Q' = P' \operatorname{tang}.\alpha \qquad (II),$$

$$t' = \frac{P'}{\cos.\alpha}.$$

Scomponiamo la forza:

$$(t + t') = (P + P') \frac{1}{\cos.\alpha},$$

diretta secondo l'asse del puntone ed applicata nel punto B, in due, una orizzontale Q'' ed una verticale V', si avrà:

$$Q'' = (t + t') \operatorname{sen}.\alpha = (P + P') \operatorname{tang}.\alpha.$$

$$V' = (t + t') \cos.\alpha = P + P'.$$

Quindi contro l'appoggio B si eserciterà la pressione verticale:

$$V = V' + P'' = P + P' + P'' = pl \qquad \text{(III)},$$

e la spinta orizzontale:

$$Q'' = (P + P')\,\text{tang.}\alpha = \frac{1}{2}\,pl\,\text{taug.}\alpha + \frac{1}{8}\left(d + \frac{l^2}{l-d}\right)p\,\text{tang.}\alpha\,\text{(IV)}.$$

In questa eguaglianza il termine $\frac{1}{2}pl$ tang.α esprime la spinta orizzontale del puntone, quando non vi ha sottocatena.

Quando il cavalletto è provvisto di sottocatena, allora la spinta orizzontale si accresce della quantità:

$$\frac{1}{8}\left(d + \frac{l^2}{l-d}\right)p\,\text{tang.}\alpha.$$

la quale cresce proporzionalmente a d, quindi la spinta aumenta coll'avvicinarsi della sottocatena alla catena.

La spinta orizzontale dei due puntoni nel vertice A è:

$$Q = P\,\text{tang.}\alpha = \frac{d^2 + 3dl - l^2}{8d}\,p\,\text{tang.}\alpha.$$

Nel caso, in cui la equazione $d^2 + 3dl - l^2 = 0$, ossia $d = 0{,}3027l$. i due puntoni non esercitano fra di loro nel vertice A alcuna spinta; se $d < 0{,}3027\,l$, allora i due puntoni devono essere riuniti nel vertice saldamente, affinchè non abbia luogo in A alcuna apertura.

Nella sottocatena viene cimentata la resistenza alla compressione, perciò la sua sezione avrà l'area:

$$A_1 = \frac{1+\gamma}{K_2}\,P'\,\text{tang.}\alpha \qquad \text{(V)}.$$

Nella trave BD viene cimentata la resistenza alla flessione dalle forze $2qX$ e Q'', aventi la risultante obliqua all'asse, quindi l'area:

$$F = \frac{X}{B}\left\{\frac{P+P'}{Y} + \frac{hF}{T}\,\frac{qX}{4}\right\} \qquad \text{(VI)}.$$

Il momento delle forze V, Q'' e $p(l-d)$, che sollecitano il tratto BE del puntone, rispetto alla sezione E, ossia:

$$M = \left[Q'' \cos.\alpha - \frac{1}{2}\, p\,(l+d) \operatorname{sen}.\alpha\right](l-d).$$

Ponendo tale valore per M e $t+t'$ invece di T_x nella (V) del § 41, la sezione trasversale del puntone, avrà l'area:

$$A = \frac{1}{R}\left\{\frac{P+P'}{\cos.\alpha} + \frac{hA}{2T}\, M\right\} \qquad \text{(VII)}.$$

Se E è il punto di mezzo del puntone, ossia se $d = \frac{1}{2}l$, allora:

$$A = \frac{1}{R}\left\{\frac{13\,pl}{16\cos.\alpha} + \frac{hA}{2T}\,\frac{pl^2 \operatorname{sen}.\alpha}{32}\right\} \qquad \text{(VIII)}.$$

Se $d = \frac{1}{3}l$, l'area:

$$A = \frac{pl}{48\,R}\left\{\frac{35}{\cos.\alpha} + \frac{hA}{T}\, l \operatorname{sen}.\alpha\right\} = \frac{pl}{48\,R}\left\{\frac{35\,l}{Y} + \frac{hAX}{T}\right\} \ \text{(IX)}.$$

Queste equazioni servono, quando il puntone presenta una sezione costante in tutti i punti.

§ 72. Cavalletto composto di due puntoni, di due sottopuntoni, di una catena e di una sottocatena. — Sia il cavalletto B'AD' (*Fig.* 93) formato dei puntoni AB', AD', della catena B'D' e dei sottopuntoni EB, FD, che sostengono la sottocatena EF, che alle estremità porta i correnti E', F', sopra i quali si appoggiano i puntoni.

Ciascun puntone è caricato di un peso pl uniformemente distribuito sopra la lunghezza l.

Siano:

P, P' e P'' le pressioni verticali nei punti A, E' e B'.

Q, Q' e Q'' le spinte orizzontali nei detti punti,

A, A', F le aree delle sezioni del sottopuntone, della sottocatena e del puntone.

Poniamo l'angolo CAB' = CAD' = α, d = AE, d' = EB, s = EF.

Scompongasi la forza P, che agisce nel vertice A in due componenti, una orizzontale Q, l'altra diretta secondo l'asse del puntone; si avrà come nel precedente paragrafo:

$$Q = P\ \text{tang}.\alpha \qquad (1),$$

$$t = \frac{P}{\cos.\alpha} \qquad (2).$$

La prima è annullata dalla spinta dell'altro puntone, la seconda esercita una pressione nella trave AB'.

Scompongasi la P in due componenti ortogonali, una t' diretta secondo l'asse del puntone, l'altra N normale ad esso; si avrà:

$$t' = P' \cos.\alpha \qquad (3),$$

$$N = P' \text{sen}.\alpha \qquad (4).$$

Scompongasi la N = ad in due componenti una $T_x = ac$ diretta secondo l'asse del sottopuntone, l'altra $Q' = ab$ orizzontale, che cimenta la resistenza alla compressione nella sottocatena. Essendo nel parallelogramma $cabd$ l'angolo $cad = 90°$, $bad = cag = \alpha$, $bac = cad + dab = 90 + \alpha$, si avrà:

$$Q' = \frac{N}{\text{sen}.\,(90 + \alpha)} = P'\ \text{tang}.\alpha \qquad (\text{I}),$$

$$T_x = N\ \text{tang}.\alpha = P'\ \text{sen}.\alpha\ \text{tang}.\alpha \qquad (\text{II}).$$

Il sottopuntone EB esercita nell'appoggio B una spinta orizzontale H', ed una pressione verticale V', le quali saranno date dalle componenti H' e V' della forza T_x, che forma un angolo α colla verticale; si avrà:

$$H' = T_x\,\text{sen}.\alpha = P'\ \text{sen}.^2\alpha\ \text{tang}.\alpha \qquad (5),$$

$$V' = T_x \cos.\alpha = P'\ \text{sen}.^2\alpha \qquad (6).$$

Scompongasi la $t + t'$ diretta secondo l'asse del puntone nelle componenti H″ e v, la prima orizzontale, la seconda verticale; si avrà:

$$H'' = (t + t')\,\text{sen.}\alpha = (P + P'\cos.^2\alpha)\,\text{tang.}\alpha \qquad (7),$$

$$v = (t + t')\cos.\alpha \qquad (8).$$

In B′ dal puntone verrà esercitata una pressione verticale

$$V'' = P'' + v = \left(\frac{P}{\cos.\alpha} + P'\cos.\alpha\right)\cos.\alpha + P'' =$$

$$= P + P'' + P'\cos.^2\alpha \qquad (9).$$

In BB′ la catena sarà sollecitata dalla spinta orizzontale

$$Q'' = H' + H'' = \left\{P'\,\text{sen.}^2\alpha + P'\cos.^2\alpha + P\right\}\text{tang.}\alpha =$$

$$= (P + P')\,\text{tang.}\alpha = \frac{1}{8}\left(4l + d + \frac{l^2}{l - d}\right)p\,\text{tang.}\alpha \qquad (III),$$

e nell'appoggio BB′ si eserciterà la pressione verticale

$$V = V' + V'' = P + P' + P'' = pl \qquad (IV).$$

Nel sottopuntone viene cimentata la resistenza alla compressione dalla forza T_x, quindi la sua area:

$$A = \frac{1 + \gamma}{K_2}\,P'\,\text{sen.}\alpha\,\text{tang.}\alpha \qquad (V).$$

Per sezione circolare di raggio r, essendo il sottopuntone in legno ed in ferro, si avrà:

$$\pi r^2 = \frac{P'\,\text{sen.}\alpha\,\text{tang.}\alpha}{K_2}\left\{1 + 0{,}0016\left(\frac{K_2}{d}\right)^2\right\} \qquad (VI).$$

Nella sottocatena vien cimentata la resistenza alla compressione dalla forza orizzontale Q', quindi:

$$A' = \frac{1+\gamma}{K_2} P' \text{tang.}\alpha \qquad \text{(VII)}.$$

Il momento delle forze estrinseche H'', V'' e $p(l-d)$, che cimentano B'E' rispetto ad E' è:

$$M = \left[H'' \cos.\alpha - V'' \text{sen.}\alpha + \frac{1}{2} p (l-d) \text{sen.}\alpha \right] (l-d),$$

nella quale ponendo per H'' e V'' i loro valori, si ottiene:

$$M = \left[\frac{1}{2} p (l-d) - P'' \right] (l-d) \text{ sen.}\alpha.$$

Sostituendo questo valore per M, e quello di $t+t'$ per T nella (V) del § 41, si avrà l'area:

$$F = \frac{1}{R} \left[\frac{P + P' \cos.^2\alpha}{\cos.\alpha} + \frac{hF}{2T} \left\{ \frac{1}{2} p (l-d) - P'' \right\} (l-d) \text{ sen.}\alpha \right] \qquad \text{(VIII)}.$$

$$F = \frac{1}{R} \left[\frac{P + P' \cos.^2\alpha}{\cos.\alpha} + \frac{hF}{2T} (l^2 - 3ld + 3d^2) p \text{ sen.}\alpha \right] \qquad \text{(IX)}.$$

Per sezione rettangolare di base b e di altezza h l'area:

$$bh = \frac{1}{R} \left[\frac{P + P' \cos.^2\alpha}{\cos.\alpha} + \frac{3}{4} \frac{p \text{ sen.}\alpha}{h} (l^2 - 3ld + 3d^2) \right] \qquad \text{(X)}.$$

§ 73. Altro cavalletto composto di due puntoni, di due sottopuntoni, di una catena e di una sottocatena. — Nel cavalletto B'A'D' (*Fig.* 94), i sottopuntoni BA, AD connessi nel vertice A tra di loro, nei punti B e D alla catena BD e legati dalla trave orizzontale EF, portano in A e nei punti E ed F, B e D correnti, sopra i quali si appoggiano i puntoni B'A', A'D'.

Sia pl il peso uniformemente distribuito sopra ciascun puntone e siano P, P' e P'' le reazioni verticali degli appoggi A, E e B.

Le componenti di P e P' dirette normalmente all'asse del puntone sono:

$$N = P \, \text{sen.}\alpha, \quad N' = P' \, \text{sen.}\alpha \qquad \text{(I).}$$

Le componenti dirette secondo l'asse del puntone sono:

$$t = P \cos.\alpha, \quad t' = P' \cos.\alpha.$$

Le forze N ed N' esercitano la loro azione sopra i correnti A' ed E', mentre:

$$t + t' = (P + P') \cos.\alpha \qquad \text{(II),}$$

comprime il puntone.

Si scomponga ciascuna delle N, N' in due componenti, una orizzontale e l'altra parallela al sottopuntone; si avrà:

$$Q = P \, \text{tang.}\alpha, \quad Q' = P' \, \text{tang.}\alpha \qquad \text{(III),}$$

$$T' = P \, \text{sen.}\alpha \, \text{tang.}\alpha, \quad T'' = P' \, \text{sen.}\alpha \, \text{tang.}\alpha.$$

La forza Q è annullata dalla spinta reciproca dei due sotto puntoni in A, mentre la

$$T_x = T' + T'' = (P + P') \, \text{tang.}\alpha \, \text{sen.}\alpha \qquad \text{(IV).}$$

cimenta la resistenza alla compressione in EB.

Scomponendo la T_x in due componenti, cioè nella orizzontale H' e nella verticale, così la $t + t'$ nella orizzontale H'' e nella verticale, nel tratto BB' della catena si eserciterà la spinta orizzontale da

$$Q'' = H' + H'' = T_x \, \text{sen.}\alpha + (t + t') \, \text{sen.}\alpha = (P + P') \, \text{tang.}\alpha \quad \text{(V).}$$

Nel tratto EB del sottopuntone viene cimentata la resistenza alla compressione dalla forza $T_x = T' + T''$, quindi la sua sezione avrà l'area:

$$A = \frac{1 + \gamma}{K_1} (P + P') \, \text{sen.}\alpha \, \text{tang.}\alpha \qquad \text{(VI).}$$

Il valore dell'area della sezione trasversale della sottocatena è dato dalla (VII) del precedente paragrafo.

Ora nel puntone viene cimentata la resistenza alla flessione da forze la cui risultante è obliqua all'asse.

Il momento statico delle forze, che sollecitano EB rispetto alla sezione E, è:

$$M = \left[\frac{1}{2} p (l - d) - P''\right] (l - d) \operatorname{sen}.\alpha.$$

La forza diretta secondo l'asse del puntone ha il valore:

$$t + t' = (P + P') \cos.\alpha,$$

la sezione trasversale del puntone avrà l'area:

$$F = \frac{1}{R} \left[(P + P') \cos.\alpha + \frac{hF}{16T} (l^2 - 3ld + 3d^2)\, p \operatorname{sen}.\alpha\right] \quad \text{(VII)}.$$

Per sezione rettangolare:

$$F = bh = \frac{1}{R} \left[(P + P') \cos.\alpha + \frac{3}{4} \frac{p \operatorname{sen}.\alpha}{h} (l^2 - 3ld + 3d^2)\right] \text{(VIII)}.$$

§ 74. **Cavalletto di grande portata.** — L'armatura BAA'D (*Fig.* 95), che appoggia negli estremi B e D della catena BD, porta in C metà di AA' un ritto verticale, il quale è rattenuto dalle saette JL, J'L'. Nel vertice H, nei punti E ed E', F ed F', sono disposti correnti orizzontali, sopra i quali sono collocati i puntoni. La sottocatena AA' è rilegata ai sottopuntoni AB, A'D dalle saette *mn*, *m'n'*, ed i sottopuntoni sono rinforzati dai tiranti orizzontali FG, F'G'.

La trave HEF preme sopra i tre appoggi H, E ed F coi pesi P, P' e P''.

Poniamo:

d la distanza HE,

$l' =$ AB lunghezza dei sottopuntoni,

$\alpha =$ FHC angolo di ciascun puntone colla verticale,

$\beta =$ BAb angolo di ciascun sotto puntone colla verticale,

$\varphi =$ LJc angolo di LJ o di L'J' colla verticale,

Q' la forza, che cimenta la resistenza alla compressione nella trave AA',

Q'' la spinta orizzontale esercitata contro la trave BD,

T' la forza, che comprime J'L,

T_x quella, che produce una pressione nella trave AB.

La componente di P parallela all'asse del puntone è:

$$t = P \cos.\alpha \qquad (1),$$

quella normale ad HF è:

$$N = P \operatorname{sen}.\alpha \qquad (2).$$

Si scomponga la N in due componenti, una orizzontale, che è annullata dalla spinta dei due puntoni in H, l'altra verticale

$$v' = P \operatorname{sen}.^2\alpha \qquad (3),$$

che esercita la sua pressione sopra la trave verticale HC.

Scompongasi la v' in due componenti, una orizzontale annullata dalla spinta delle due saette JL, J'L'; l'altra parallela ad JL, la quale ha il valore:

$$T' = \frac{v'}{\cos.\varphi} = \frac{P \operatorname{sen}.^2\alpha}{\cos.\varphi} \qquad (I).$$

Questa forza trasportata nel piede L, la si scomponga in una componente orizzontale e nella verticale:

$$v_1 = T' \cos.\varphi \qquad (4).$$

Si scomponga la forza t parallela al puntone in due componenti, una orizzontale, l'altra verticale

$$v_2 = t \cos.\alpha \qquad (5),$$

quindi in A vi sarà applicata la forza verticale:

$$V' = v_2 + v_1 + P' = t \cos.\alpha + T' \cos.\varphi + P' = P + P' \qquad (II).$$

Questa esercita una pressione nella trave EE' colla sua componente orizzontale:

$$Q' = (P + P') \operatorname{tang}.\beta = \frac{1}{8}\left(4l + d + \frac{l^2}{l-d}\right) p \operatorname{tang}.\beta \quad \text{(III)}.$$

ed una pressione nella trave EB colla sua componente

$$T_x = \frac{P + P'}{\cos.\beta} = \frac{1}{8}\left(4l + d + \frac{l^2}{l-d}\right) \frac{p}{\cos.\beta} \quad \text{(IV)}.$$

Il cavalletto eserciterà nella catena BD una spinta orizzontale. che sarà data dalla componente orizzontale di T_x, ed una pressione, che avrà il valore della componente verticale di T_x, quindi:

$$Q'' = (P + P') \frac{\operatorname{sen}.\beta}{\cos.\beta} = (P + P') \operatorname{tang}.\beta \quad \text{(V)}.$$

$$V'' = (P + P') \frac{\cos.\beta}{\cos.\beta} = P + P' \quad \text{(VI)}.$$

Nelle travi JL, AB ed AA' viene cimentata la resistenza alla compressione, nella prima dalla forza T', nella seconda da T_x, nella terza da Q', quindi le aree delle loro sezioni trasversali saranno:

$$A_1 = \frac{1+\gamma}{K_2} T' = \frac{1+\gamma}{K_2} \frac{P \operatorname{sen}.^2\alpha}{\cos.\varphi} \quad \text{(VII)}.$$

$$A_2 = \frac{1+\gamma}{K_2} T_x = \frac{1+\gamma}{K_2} \frac{P + P'}{\cos.\beta} \quad \text{(VIII)}.$$

$$A_3 = \frac{1+\gamma}{K_2} Q' = \frac{1+\gamma}{K_2} (P + P') \operatorname{tang}.\beta \quad \text{(IX)}.$$

Il puntone connesso al corrente E non verrà lungo il suo asse sollecitato che dalla componente $P'' \cos.\alpha$ della forza P''; il momento inflettente eguaglia quello posto nella (IX) del § 72, quindi la sua sezione trasversale avrà l'area:

$$F = \frac{1}{R} \left\{ P'' \cos.\alpha + \frac{hF}{16T} (l^2 - 3ld + 3d^2) p \operatorname{sen}.\alpha \right\} \quad \text{(X)}$$

La catena BD è una trave appoggiata alle due estremità e caricata di un peso $2qX$ uniformemente distribuito nella lunghezza $2X$ e sollecitato dalla forza orizzontale $\frac{P+P'}{\cos.\beta}$, quindi la sua sezione trasversale avrà l'area:

$$F_1 = \frac{1}{R}\left\{\frac{P+P'}{\cos.\beta} + \frac{hF_1}{4T}pX^2\right\} \qquad (XI).$$

Se il puntone HEF consta di due parti HE ed EF, allora le pressioni nei punti di appoggio ossia P, P' e P'' si ottengono scomponendo la forza pd in due componenti applicate nei punti H ed E, e la $p(l-d)$ nelle componenti nei punti E ed F, quindi:

$$P_1 = \frac{1}{2}pd,$$

$$P_1' = \frac{1}{2}(l-d)p + \frac{1}{2}pd = \frac{1}{2}pl,$$

$$P_1'' = \frac{1}{2}(l-d)p \qquad (6),$$

e la somma delle due pressioni P_1 e P_1' ossia:

$$P_1 + P_1' = \frac{1}{2}(l+d)p \qquad (7).$$

La distanza d praticamente si tiene da $\frac{1}{3}$ od $\frac{1}{2}$ della lunghezza l.

Quando il puntone è formato da una sola trave HF dal § 31, risulta:

per $d = \frac{1}{2}l$, $\qquad P + P' = \frac{13}{16}pl$;

per $d = \frac{1}{3}l$, $\qquad P + P' = \frac{35}{48}pl$.

Quando è composto dalle parti HE ed EF, allora dalla (2) si ottiene:

per $d = \frac{1}{2} l$, $\qquad P_1 + P_1' = \frac{12}{16} pl$;

per $d = \frac{1}{3} l$, $\qquad P_1 + P_1' = \frac{32}{48} pl$.

La differenza tra questi ed i precedenti valori è di $\frac{1}{16} pl$, quindi nel caso, in cui il puntone è di un sol pezzo si può senza grave errore prendere per $P + P'$ il valore dato da (7), al quale si aggiunga $\frac{1}{16} pl$; si avrà dunque:

$$P + P' = \frac{1}{2}(l + d) p + \frac{1}{16} pl = \frac{1}{2}(1{,}12\, l + d) p \qquad \text{(XII)},$$

$$P'' = pl - \frac{1}{2}(1{,}12\, l + d) p = \frac{1}{2}(0{,}88\, l - d) p \qquad \text{(XIII)}.$$

Ponendo nelle eguaglianze del precedente paragrafo per P'' e $P + P'$ i valori (XII) e (XIII), si otterrà:

$$V' = (0{,}56\, l + \frac{1}{2} d) p \qquad \text{(XIV)},$$

$$Q' = (1{,}12\, l + d) \frac{p \operatorname{tang}.\beta}{2} \qquad \text{(XV)},$$

$$T_x = \frac{1{,}12 l + d}{2 \cos.\beta} p \qquad \text{(XVI)},$$

$$Q'' = \frac{1}{2}(1{,}12\, l + d) p \operatorname{tang}.\beta \qquad \text{(XVII)},$$

$$V'' = \frac{1}{2}(1{,}12\, l + d) p \qquad \text{(XVIII)}.$$

La sezione trasversale di AB avrà l'area:

$$A_2 = \frac{1+\gamma}{K_2} \frac{1{,}12\,l + d}{2\cos.\beta}\,p \qquad (XIX).$$

La sottocatena avrà la sezione trasversale:

$$A_3 = \frac{1+\gamma}{K_2}(1{,}12\,l + d)\frac{p\,\mathrm{tang}.\beta}{2} \qquad (XX).$$

La sezione trasversale del puntone avrà l'area:

$$F = \frac{1}{R}\left\{\frac{1}{2}p(0{,}88\,l - d)\cos.\alpha + \frac{hF}{32T}\,pl\,(l-d)\,\mathrm{sen}.\alpha\right\} \quad (XXI).$$

per sezione rettangolare:

$$F = bh = \frac{1}{R}\left\{\frac{1}{2}p(0{,}88\,l - d)\cos.\alpha + \frac{3}{8}\frac{pl}{h}(l-d)\,\mathrm{sen}.\alpha\right\} \quad (XXII).$$

§ 75. Posizione di equilibrio delle parti componenti un cavalletto formato di 4 puntoni caricati di pesi uniformemente distribuiti nella loro lunghezza. — I puntoni BE, EA, AF ed FD compongono il cavalletto BAD posto in un piano verticale, ed appoggiato nelle estremità B e D alla catena BD (*Fig.* 96).

Poniamo:

per il puntone EA, la sua lunghezza $= l$, l'angolo EAC $= \alpha$ e pl il peso distribuito sopra la sua lunghezza;

per il puntone EB, la sua lunghezza $= l'$, l'angolo BEG $= \beta$ e $p'l'$ il peso distribuito uniformemente sopra la lunghezza l';

Q il valore delle spinte orizzontali, che AE riceve nei punti A ed E,

V la pressione verticale esercitata da AE sopra il puntone EB,

Q' il valore delle spinte orizzontali eguali, che sollecitano EB nei punti E e B,

V' la pressione verticale esercitata dal mezzo cavalletto nell'appoggio B.

Il puntone AE caricato del peso pl deve essere in equilibrio, quando si applichi in A la orizzontale Q, ed in E la forza oriz-

zontale Q e la verticale V; così pure EB, che deve sopportare il peso $p'l'$ è in equilibrio, quando si applichino in E le forze Q' e V, ed in B le forze V' e Q'.

Ora il puntone AE si può considerare come una trave appoggiata in A ad una parete verticale ed in E stabilmente ad un appoggio, quindi dal § 42 si ha:

$$Q = \frac{1}{2} pl \operatorname{tang}.\alpha \qquad \text{(I)},$$

$$V = pl \qquad \text{(II)}.$$

La pressione esercitata dal mezzo cavalletto sopra l'appoggio B è:

$$V' = pl + p'l' \qquad \text{(III)}.$$

Osservo che il momento delle forze V, Q' e $p'l'$ rispetto al punto B deve per l'equilibrio di EB eguagliare zero, perciò:

$$Q'l' \cos.\beta - Vl' \operatorname{sen}.\beta - \frac{1}{2} p'l'^2 \operatorname{sen}.\beta = 0,$$

da cui:

$$Q' = \left(V + \frac{1}{2} p'l'\right) \operatorname{tang}.\beta = \left(pl + \frac{1}{2} p'l'\right) \operatorname{tang}.\beta \qquad \text{(IV)}.$$

Affinchè il punto E sia in equilibrio, è necessario, che $Q = Q'$, ossia:

$$\frac{1}{2} pl \operatorname{tang}.\alpha = \left(pl + \frac{1}{2} p'l'\right) \operatorname{tang}.\beta,$$

da cui:

$$\operatorname{tang}.\beta = \frac{pl}{2pl + p'l'} \operatorname{tang}.\alpha \qquad \text{(V)}.$$

la quale relazione fissa la posizione di equilibrio dei due puntoni, quando siano noti i valori di p, p', l ed l' ed uno degli angoli α e β.

§ 76. Posizione di equilibrio dei puntoni componenti un cavalletto poligonale, caricato di pesi applicati nei vertici. — I puntoni AE, EB, compongono il mezzo cavalletto AB, il quale porta in A la forza 2P, in E la P', essendo il cavalletto BAD simmetrico rispetto alla retta AC (*Fig.* 96).

Nel vertice A del mezzo cavalletto AB sono applicate le forze V = P e

$$Q = V \operatorname{tang}.\alpha = P \operatorname{tang}.\alpha \qquad (I).$$

Nello spigolo E si troveranno le forze:

$$V' = P + P',$$

$$Q' = V' \operatorname{tang}.\beta = (P + P') \operatorname{tang}.\beta \qquad (II).$$

Per l'equilibrio la Q deve eguagliare Q', perciò:

$$P \operatorname{tang}.\alpha = (P + P') \operatorname{tang}.\beta,$$

da cui:

$$\operatorname{tang}.\beta = \frac{P}{P + P'} \operatorname{tang}.\alpha \qquad (III),$$

la quale determina la posizione dei puntoni, quando siano noti i valori delle forze P e P' ed uno degli angoli α e β.

Nei puntoni non verrà cimentata che la resistenza alla compressione, quindi la sezione trasversale di AE avrà l'area:

$$A_1 = (1 + \gamma) \frac{P}{K_2 \cos.\alpha} \qquad (IV),$$

e quella di EB avrà l'area:

$$A_2 = (1 + \gamma) \frac{P + P'}{K_2 \cos.\beta}.$$

Sia l'armatura BAD simmetrica rispetto ad AC composta di più puntoni AE, EF, FG e GB, che porta nel vertice A la forza 2P, nei punti E, E' la P', in F ed F' la P'', in G' la P''' (*Fig.* 97).

Chiamiamo:

α, β, γ, δ gli angoli dei successivi puntoni colla verticale,

Q, Q', Q'', Q''' le spinte orizzontali applicate nei punti A, E, F, G e B,

T, T', T'', T''' gli sforzi, che cimentano la resistenza alla compressione nei puntoni AE, EF, FG e GB.

Nel puntone AE sono applicate:
la forza orizzontale

$$Q = P \tan g.\alpha \qquad (V),$$

e la pressione

$$T = \frac{P}{\cos.\alpha} \qquad (VI),$$

la sua area

$$A = (1+\gamma)\frac{P}{K_2 \cos.\alpha} \qquad (VII).$$

Rispetto ad EF si ha:

$$Q' = (P+P') \tan g.\beta \qquad (VIII),$$

$$T' = \frac{P+P'}{\cos.\beta} \qquad (IX),$$

quindi:

$$A' = (1+\gamma)\frac{P+P'}{K_2 \cos.\beta} \qquad (X).$$

Rispetto ad FG si ha:

$$Q'' = (P+P'+P'') \tan g.\gamma \qquad (XI).$$

$$T'' = \frac{P+P'+P''}{\cos.\gamma} \qquad (XII).$$

$$A'' = (1+\gamma)\frac{P+P'+P''}{K_2 \cos.\gamma} \qquad (XIII).$$

Per il puntone GB finalmente si ha:

$$Q''' = (P + P' + P'' + P''') \operatorname{tang}.\delta \qquad (XIV),$$

$$T''' = \frac{P + P' + P'' + P'''}{\cos.\delta} \qquad (XV),$$

$$A''' = (1 + \gamma) \frac{P + P' + P'' + P'''}{K_2 \cos.\delta} \qquad (XVI).$$

Quando sia dato l'angolo α, la posizione di equilibrio dei puntoni sarà data dalle seguenti equazioni:

$$\operatorname{tang}.\beta = \frac{P \operatorname{tang}.\alpha}{P + P'} \qquad (XVII),$$

$$\operatorname{tang}.\gamma = \frac{P \operatorname{tang}.\alpha}{P + P' + P''} \qquad (XVIII),$$

$$\operatorname{tang}.\delta = \frac{P \operatorname{tang}.\alpha}{P + P' + P'' + P'''} \qquad (XIX).$$

§ 77. Cavalletto composto di due puntoni sostenuti da una armatura pentagonale. — Il cavalletto BGAG'D, (*Fig.* 98) composto dei puntoni AG, AG' appoggiati ai ritti BG, DG' e rinforzati dalle saette BF, DF' e dalla sottocatena EE', porta sopra i correnti A, E ed E', F ed F', G e G' i puntoni, i quali colla copertura e col sovraccarico eserciteranno nei punti A, E ed E', F ed F', G e G' le pressioni verticali P, P', P'' e P'''.

Chiamiamo:

l, d e d' le lunghezze AG, AE ed FG,

l' la lunghezza di FB,

α e β gli angoli di AG e di FB colla verticale,

Q, Q' e Q'' le spinte orizzontali nei punti E, F e B,

T, T' e T'' gli sforzi, che comprimono AE, EF ed FB,

A, A', A''' e A'' le aree delle sezioni trasversali delle travi AE, EF, FB ed EE'.

Scompongasi la forza P in due componenti, una orizzontale, l'altra parallela ad AE; si avrà:

$$Q = P \operatorname{tang}.\alpha \qquad \text{(I)},$$

$$T = \frac{P}{\cos.\alpha} \qquad \text{(II)},$$

la prima è la spinta reciproca dei due puntoni in A, la seconda è la pressione esercitata nel puntone AE.

Così la componente orizzontale di P' è:

$$q = P' \operatorname{tang}.\alpha \qquad (1),$$

e quella parallela ad EF è:

$$t = \frac{P'}{\cos.\alpha} \qquad (2),$$

quindi in EF verrà cimentata la resistenza alla compressione dalla forza:

$$T' = T + t = \frac{P + P'}{\cos.\alpha} \qquad \text{(III)}.$$

Si scomponga la forza T' nella orizzontale Q' e nella verticale V; si avrà:

$$Q' = T' \operatorname{sen}.\alpha = (P + P') \operatorname{tang}.\alpha \qquad \text{(IV)},$$

$$V = T' \cos.\alpha = P + P' \qquad \text{(V)}.$$

Ma in F è pure applicata la forza P'', quindi:

$$V' = P + P' + P'' \qquad \text{(VI)}.$$

La spinta orizzontale esercitata in B sarà:

$$Q'' = V' \operatorname{tang}.\beta = (P + P' + P'') \operatorname{tang}.\beta \qquad \text{(VII)}.$$

La forza, che comprime la saetta FB, è:

$$T'' = (P + P' + P'') \frac{1}{\cos.\beta} \qquad \text{(VIII)}$$

Per l'equilibrio la spinta $Q' = Q''$, quindi P, P', P'', α e β saranno legate dalla relazione:

$$(P + P') \operatorname{tang}.\alpha = (P + P' + P'') \operatorname{tang}.\beta,$$

da cui:

$$\operatorname{tang}.\beta = \frac{P + P'}{P + P' = P''} \operatorname{tang}.\alpha \qquad \text{(IX)}.$$

la quale equazione fissa la posizione della saetta FB.

I valori della pressione P, P', P'' e P''' potranno essere determinati in questo modo. Sia p il peso sopra ogni unità di lunghezza di ciascun puntone, scomponiamo il peso pd in due componenti, una in A, l'altra in E; il peso $p(l - d - d')$ nelle componenti applicate in E ed F, così pure pd' nelle componenti applicate nei punti F e G; si avrà:

$$P = \frac{1}{2} pd,$$

$$P' = \frac{1}{2} p (l - d - d') + \frac{1}{2} pd = \frac{1}{2} p (l - d'),$$

$$P'' = \frac{1}{2} p (l - d - d') + \frac{1}{2} pd' = \frac{1}{2} p (l - d),$$

$$P''' = \frac{1}{2} pd'.$$

Ponendo tali valori nelle (IV) e (VII), si avrà:

$$Q' = \frac{1}{2} p (l - d' + d) \operatorname{tang}.\alpha \qquad \text{(X)},$$

$$Q'' = \frac{1}{2} p \, (2l - d') \, \text{tang.}\beta = p \left(l - \frac{1}{2} d'\right) \text{tang.}\beta \qquad \text{(XI).}$$

La posizione di equilibrio della saetta FB è data dalla equazione:

$$\text{tang.}\beta = \frac{l + d - d'}{2l - d'} \, \text{tang.}\alpha \qquad \text{(XII),}$$

ed i valori delle pressioni sopportate da AE, EF ed FB sono:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{pd}{2 \cos.\alpha} \\ T'_1 &= \frac{p \, (l - d' + d)}{2 \cos.\alpha} \\ T'' &= \frac{p \, (2l - d')}{2 \cos.\beta} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIII),}$$

quindi si avrà:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1 + \gamma}{K_2} \, \frac{pd}{2 \cos.\alpha} \\ A' &= \frac{1 + \gamma}{K_2} \, \frac{p \, (l - d' + d)}{2 \cos.\alpha} \\ A'' &= \frac{1 + \gamma}{K_2} \, \frac{p \, (2l - d')}{2 \cos.\beta} \\ A''' &= \frac{1 + \gamma}{K_2} \, \frac{p \, (l - d')}{2} \, \text{tang.}\alpha \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV).}$$

Esempio. Per una incavallatura di 12^m di portata, e 4^m di saetta sia:

$$p = 500^{\text{chilogr.}}\ l = \sqrt{\{6^2 + 4^2\}} = 7^m,211, \quad d = 3^m,00,$$

$$d' = 1,808, \quad l' = 2,403 \text{ e } \tan g.\alpha = \frac{6}{4} = 1,5.$$

Ponendo tali valori nelle eguaglianze precedenti, si ottiene:

$$P = 750 \text{ chilogr.}, \quad P' = 1350, \quad P'' = 1052,75, \quad P''' = 452.$$

La spinta:

$$Q' = Q'' = 3150 \text{ chilogrammi},$$

quindi:

$$\beta = 45^\circ.$$

$$T = \frac{75^\circ}{\cos.56^\circ,19'} = 1354; \quad T' = \frac{2100}{\cos.56^\circ,19'} = 3790,61;$$

$$T'' = \frac{3152,75}{\cos.45^\circ} = 4459,33.$$

La forza, che cimenta la resistenza alla compressione nella trave EE' ossia:

$$\frac{1}{2}p\,(l - d')\tan g.\alpha = 1350.\ \frac{3}{2} = 2025 \text{ chilogrammi}.$$

Trascurando l'incurvamento che subiscono le travi nello schiacciamento, facendo loro sopportare uno sforzo di 10 chilogrammi per c.m.q., si avrà:

$$A = 135^{\text{c.m.q.}},4, \quad A' = 379^{\text{c.m.q.}}, \quad A'' = 445^{\text{c.m.q.}},93,$$

$$A''' = 202^{\text{c.m.q.}},5.$$

§ 78. **Cavalletto composto di due puntoni rinforzati da una armatura poligonale formata di una trave orizzontale e di sei travi inclinate.** — Nel cavalletto GAG' i puntoni GA, AG' di lunghezza l portano per mezzo dei correnti disposti nei punti G, J, F, E, A, E', F', J', G' il peso della copertura e del sovra carico. I puntoni sono rilegati dalla sottocatena EE' e rinforzati dalle saette BJ, HF, F'H', J'D (*Fig.* 99).

Si determinino gli sforzi, a cui sono sottoposti i varii membri componenti il cavalletto e le loro dimensioni.

Siano:

α, β, δ gli angoli delle saette AG, FH, HB colla verticale,

P, P', P'', P''' le pressioni esercitate nei punti A, E, F ed J.

La spinta orizzontale e la pressione esercitata in E sopra il puntone EF sono date dalle (I) e (II) del § precedente.

Per la parte EF del puntone si ha la spinta orizzontale:

$$Q' = (P + P') \tang.\alpha \qquad (I),$$

e la pressione verticale:

$$T' = \frac{P + P'}{\cos.\alpha} \qquad (II).$$

Le forze verticali P, P', P'', P''' esercitano sopra la saetta HB una spinta orizzontale:

$$Q''' = (P + P' + P'' + P''') \tang.\delta \qquad (III),$$

ed una pressione colla forza

$$T''' = (P + P' + P'' + P''') \frac{1}{\cos.\delta} \qquad (IV).$$

Scomponiamo la forza T''' in due componenti, una orizzontale, l'altra verticale: la prima, che eguaglia Q''', è il valore della spinta orizzontale esercitata in B contro il muro, la seconda, che eguaglia V, è il valore della reazione dell'appoggio contro il muro.

Per l'equilibrio deve avere luogo l'equazione $Q' = Q'''$, ossia:

$$(P + P') \tang.\alpha = (P + P' + P'' + P''') \tang.\delta,$$

da cui:

$$\text{tang.}\delta = \frac{P + P'}{P + P' + P'' + P'''} \text{tang.}\alpha \qquad (V).$$

Il punto F si trova sotto l'azione del carico verticale $P + P' + P''$; scomponiamolo in due componenti, una orizzontale Q'' ed una T'' parallela ad FH, si avrà:

$$Q'' = (P + P' + P'') \text{tang.}\beta \qquad (VI),$$

$$T''' = (P + P' + P'') \frac{1}{\cos.\beta} \qquad (VII).$$

Per l'equilibrio deve esser soddisfatta l'equazione:

$$\text{tang.}\beta = \frac{P + P'}{P + P' + P''} \text{tang.}\alpha \qquad (VIII).$$

Quando i correnti sono ad eguale distanza, ossia quando

$$\frac{1}{4} l = d = AE = EF = FJ = JG,$$

allora si avrà:

$$P = \frac{1}{8} pl,$$

e

$$P' = P'' = P''' = \frac{1}{4} pl.$$

Ponendo tali valori nelle (II), (IV), (VII), si ottiene:

$$T' = \frac{3}{8} \frac{pl}{\cos.\alpha},$$

$$T'' = \frac{5}{8} \frac{pl}{\cos.\beta},$$

$$T''' = \frac{7}{8} \frac{pl}{\cos.\delta} \qquad (IX);$$

$$\left.\begin{aligned} \text{tang.}\beta &= \frac{3}{5}\,\text{tang.}\alpha \\ \text{tang.}\delta &= \frac{3}{7}\,\text{tang.}\alpha \end{aligned}\right\} \qquad \text{(X).}$$

Esprimendo con A, A' ed A" le aree delle sezioni trasversali delle travi EF, FH ed HB, nelle quali viene cimentata la resistenza alla compressione, si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1+\gamma}{K_2}\,\frac{3pl}{8\cos.\alpha} \\ A' &= \frac{1+\gamma}{K_2}\,\frac{5pl}{8\cos.\beta} \\ A'' &= \frac{1+\gamma}{K_2}\,\frac{7pl}{8\cos.\delta} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XI).}$$

§ 79. Cavalletto triangolare, il quale, oltre al peso della copertura e del sovraccarico, deve resistere all'azione orizzontale del vento. — Si determinino gli sforzi a cui sono sottoposti e le dimensioni delle sezioni trasversali delle parti componenti il cavalletto BAD (*Fig.* 100), che deve sopportare il peso della copertura e del sovraccarico, e sopra una faccia l'azione orizzontale del vento.

Pongasi:

p' il peso da sopportarsi da ogni unità di lunghezza di ciascun puntone,

q l'azione del vento sopra ogni unità di lunghezza del puntone BA,

V e V' le pressioni esercitate sopra gli appoggi D e B,

l la lunghezza del puntone,

X la sua proiezione orizzontale,

Y la sua proiezione verticale.

Il puntone BA sarà sollecitato dal peso verticale $p'l$ e dalla forza orizzontale qY. Scomponiamo ciascuno di questi in due componenti, una orizzontale in A, l'altra in B.

Nel vertice A si troverà la forza verticale:

$$P = \frac{1}{2} p' l \qquad (1),$$

e la orizzontale:

$$H = \frac{1}{2} q Y = \frac{1}{2} q l \cos.\alpha \qquad (2).$$

Scomponendo la P in due componenti, nella orizzontale h annullata dalla spinta dei due puntoni nel vertice A e nella t parallela ad AB, si avrà:

$$h = P \operatorname{tang}.\alpha,$$

$$t = \frac{P}{\cos.\alpha} \qquad (3).$$

Scompongasi la forza H nelle due componenti eguali Ak ed Ai parallele ai puntoni; sarà:

$$Ak = Ai = t' = \frac{H}{2 \operatorname{sen}.\alpha} \qquad (4).$$

La forza t esercita una pressione in BA, la t' una tensione, quindi il puntone si trova sotto l'azione della forza

$$T_1 = t - t' = \frac{P}{\cos.\alpha} - \frac{H}{2 \operatorname{sen}.\alpha} = \frac{1}{2} \frac{pl}{\cos.\alpha} - \frac{1}{4} \frac{ql \cos.\alpha}{\operatorname{sen}.\alpha} \qquad (5),$$

diretta secondo il suo asse.

Il puntone AD viene compresso dalla forza:

$$T_x = t + t' = \frac{P}{\cos.\alpha} + \frac{H}{2 \operatorname{sen}.\alpha} = \frac{pl}{2 \cos.\alpha} + \frac{1}{4} ql \frac{\cos.\alpha}{\operatorname{sen}.\alpha} \qquad (6).$$

Scompongasi la T_x in due componenti nella orizzontale Q e nella verticale V, che sommata con $\frac{1}{2} pl$, darà il valore di V pressione sopra l'appoggio D, quindi:

$$Q=\left(\frac{\frac{1}{2}pl}{\cos.\alpha}+\frac{1}{4}ql\,\frac{\cos.\alpha}{\operatorname{sen}.\alpha}\right)\operatorname{sen}.\alpha=\frac{1}{2}pl\,\operatorname{tang}.\alpha+\frac{1}{4}\,ql\cos.\alpha \quad \text{(I)},$$

$$V=\left(\frac{pl}{2\cos.\alpha}+\frac{1}{4}ql\,\frac{\cos.\alpha}{\operatorname{sen}.\alpha}\right)\cos.\alpha+\frac{1}{2}\,pl=pl+\frac{1}{4}ql\,\frac{\cos.^2\alpha}{\operatorname{sen}.\alpha} \quad \text{(II)}.$$

Nel punto B invece vi saranno le forze:

$$V'=pl-\frac{1}{4}ql\,\frac{\cos.^2\alpha}{\operatorname{sen}.\alpha} \quad \text{(III)},$$

$$Q_1=\frac{1}{2}pl\,\operatorname{tang}.\alpha-\left(\frac{1}{2}\,H+H\right)=\frac{1}{2}pl\,\operatorname{tang}.\alpha-\frac{3}{4}ql\cos.\alpha \quad \text{(IV)}.$$

Ora, osservo, che il puntone AB si trova sotto l'azione della forza orizzontale $h+H$ applicata in A e delle forze qY e pl uniformemente distribuite sopra la sua lunghezza, il momento statico delle forze estrinseche, che sollecitano AS, rispetto alla sezione di mezzo S è:

$$M=(h+H)\,\frac{1}{2}\,l\cos.\alpha-\frac{1}{2}pl\,\frac{1}{4}\,l\operatorname{sen}.\alpha-\frac{1}{2}ql\cos.\alpha\,\frac{1}{4}\,l\cos.\alpha=$$

$$=\frac{1}{8}\,l^2\,(p\operatorname{sen}.\alpha+q\cos.^2\alpha) \quad \text{(V)}.$$

quindi venendo nel puntone cimentata la resistenza alla flessione da forze aventi la resistenza obliqua all'asse, ponendo nella (V) del § 41, per T_x il valore di $t-t'$, e per M il valore dato dalla precedente equazione, la sua sezione trasversale avrà l'area:

$$F=\frac{1}{R}\left\{\frac{pl}{2\cos.\alpha}-\frac{ql\cos.\alpha}{4\operatorname{sen}.\alpha}+\frac{hF}{2T}\,\frac{l^2}{8}\,(p\operatorname{sen}.\alpha+q\cos.^2\alpha)\right\} \quad \text{(VI)}.$$

La sezione trasversale dell'altro puntone AD avrà l'area:

$$F_1=\frac{1}{R}\left\{\frac{pl}{2\cos.\alpha}+\frac{ql\cos.\alpha}{\operatorname{sen}.\alpha}+\frac{hF_1}{2T}\,\frac{l^2}{8}\,p\operatorname{sen}.\alpha\right\} \quad \text{(VII)}.$$

Ai puntoni verrà data una sezione il cui valore sarà eguale al maggiore di quelli dati dalle (VI) e (VII).

§ 80. **Incavallatura Polonceau.** — Si determinino gli sforzi, che devono sopportare e le dimensioni, che devono avere i puntoni, i tiranti, le colonnette e la catena, parti componenti l'incavallatura Polonceau.

I puntoni possono essere in legno od in ferro, i tiranti e la catena sono in ferro, e la colonnetta è di ghisa (*Fig.* 101).

Si chiamino:

X ed Y le lunghezze AH, CH,

l la lunghezza $CB = CA$,

p il carico distribuito sopra l'unità lineare di ciascun puntone,

α e β gli angoli CBH e CBE,

h la distanza del punto D dall'orizzontale AB.

Dal triangolo rettangolo ADF, si ottiene:

$$AD = DC = BE = EC = \frac{l}{2 \cos.\beta} \qquad (1),$$

$$DF = GE = \frac{1}{2}\, l \, \text{tang}.\beta \qquad (2).$$

Dal triangolo rettangolo ADK, si ottiene:

$$h = DK = AD \, \text{sen}.\, (\alpha - \beta) = \frac{l}{2} \, \frac{\text{sen}.\, (\alpha - \beta)}{\cos.\beta} \qquad (3).$$

Pongasi:

V la reazione verticale pl di ciascun appoggio,

Q la spinta orizzontale in C,

Q' la tensione sopportata da ED,

T la tensione esercitata nel tirante AD,

T' quella, che cimenta il tirante DC,

D la pressione, che cimenta la colonnetta FD.

Il sistema triangolare ADC è sotto l'azione delle forze Q, Q', pl e della reazione verticale V dell'appoggio A.

Per l'equilibrio la somma dei momenti di queste forze rispetto al punto A deve essere zero, ossia:

$$QY - Q'h - pl \frac{1}{2} X = 0,$$

da cui:

$$Q = Q' = \frac{\frac{1}{2} plX}{Y - h} \qquad (I).$$

La trave CB appoggiata nelle due estremità e nel punto di mezzo eserciterà sopra la colonnetta EG una pressione:

$$D = \frac{5}{8} pl \cos.\alpha \qquad (II).$$

Il puntone si trova sollecitato dalle forze V, T, D, pl, Q e T', la somma dei loro momenti rispetto al punto C deve esser zero, quindi:

$$pl \frac{1}{2} X - D \frac{1}{2} l - VX + Tl \,\text{sen.}\beta = 0,$$

da cui:

$$T = \frac{13}{16} pl \frac{\cos.\alpha}{\text{sen.}\beta} \qquad (III).$$

Tutte le forze applicate in D, ossia la Q diretta da D verso E, la T rivolta da D verso A, e la T' operante nella direzione DC, e la pressione D, che cimenta la colonnetta DF devono equilibrarsi, quindi la somma delle loro componenti normali al puntone deve eguagliare zero, perciò:

$$Q \,\text{sen.}\alpha - T \,\text{sen.}\beta - T' \,\text{sen.}\beta + D = 0.$$

Posti per Q, T e D i loro valori si ha:

$$\frac{1}{2} pl \frac{X}{Y - h} \text{sen.}\alpha - \frac{3}{16} pl \cos.\alpha = T' \,\text{sen.}\beta,$$

da cui:

$$T' = \frac{pl}{2 \,\text{sen.}\beta} \left\{ \frac{X}{Y - h} \text{sen.}\alpha - \frac{3}{8} \cos.\alpha \right\} \qquad (IV).$$

Nei tiranti e nella catena viene cimentata la resistenza alla estensione, la loro sezione trasversale $A = \frac{P}{K_1}$, quando si pongano per P successivamente i valori di Q, T e T'. Nella colonnetta viene cimentata la resistenza alla compressione, quindi la sua sezione avrà l'area:

$$A_1 = (1 + \gamma) \frac{P}{K_2} \qquad (V).$$

Ora ciascun puntone è una trave inclinata di un angolo α coll'orizzontale, appoggiata nelle due estremità e nella sezione di mezzo, e sollecitata da forze, la cui risultante è obliqua all'asse.

Il momento statico delle forze estrinseche, che sollecitano CG rispetto alla sezione G, che è la più pericolosa è:

$$M = T' \frac{1}{2} l \operatorname{sen}.\beta - Q \frac{1}{2} l \cos.\alpha + \frac{1}{2} p l^2 \operatorname{sen}.\alpha,$$

da cui:

$$M = \frac{1}{32} p l^2 \qquad (4).$$

La somma delle forze comprimenti è:

$$T_x = Q \cos.\alpha + T' \cos.\beta + \frac{1}{2} p l \operatorname{sen}.\alpha \qquad (5).$$

Posto nella (V) del § 41 per M e T_x i loro valori, si ottiene per la sezione trasversale del puntone, l'area:

$$F = \frac{1}{R} \left\{ Q \cos.\alpha + T' \cos.\beta + \frac{1}{2} p l \operatorname{sen}.\alpha + \frac{hF}{2T} \frac{1}{32} p l^2 \right\} \qquad (VI).$$

Esempio. In un'incavallatura Polonceau avente una portata di 15^m con saetta di 3^m, i puntoni, armati con una colonnetta alta $1^m,40$, sono caricati di un peso di 500 chilogrammi per ogni metro corrente della loro lunghezza.

Si domandano:

a) i valori di α, β, X, Y, h ed l,

b) i valori degli sforzi, ai quali sono assoggettate le varie parti,

c) le aree delle loro sezioni trasversali.

Nel nostro caso essendo $X = 7^m,50$, $Y = 3^m$, si avrà:

$$l = \sqrt{7,5^2 + 3^2} = 8,32,$$

$$\text{tang}.\alpha = \frac{3}{7,50},$$

da cui:

$$\alpha = 21°,50'.$$

$$\text{tang}.\beta = \frac{1,40}{\frac{1}{2}8,32},$$

da cui:

$$\beta = 18°.$$

Sostituendo nella (3) per α, β ed l i loro valori, si ottiene:

$$h = 4,31 \frac{\text{sen}.3°,50'}{\cos.18°} = 0^m,302.$$

La spinta orizzontale nel punto C è:

$$Q = Q' = \frac{\frac{1}{2}500.\ 8,32.\ 7,50}{300 - 0,302} = 6004,4 \text{ chilogrammi.}$$

La pressione sopportata dalla colonnetta è:

$$D = \frac{5}{8}.\ 500.\ 8,32.\ \cos.21°,50' = 2411,872 \text{ chilogrammi.}$$

La tensione sopportata dal tirante AD, ossia:

$$T = \frac{13}{16} 500.\ 8{,}32 \frac{\cos.21{,}50}{\text{sen}.18} = 10140.$$

Il tirante DC soffre la tensione:

$$T' = \frac{500.\ 8{,}32}{2\ \text{sen}.18°} \left\{ \frac{7{,}5}{2{,}698}\ \text{sen}.21°{,}50' - \frac{3}{8} \cos.21°{,}50' \right\} = 5283{,}20.$$

Posto il coefficiente di resistenza alla rottura per estensione del ferro eguale a 6 chilogrammi per m.m.q.

La catena avrà per sezione trasversale un circolo di raggio $r_1 = 0^m{,}017$;

Il tirante AD avrà per sezione trasversale un circolo di raggio $r_2 = 0^m{,}023$;

Il tirante DC avrà per sezione trasversale un circolo di raggio $r_3 = 0^m{,}016$.

La sezione più pericolosa della colonnetta in ghisa sottoposta alla compressione deve avere l'area $= 0^{m.q.}{,}004823$ posto 5 chilogrammi il coefficiente di resistenza alla rottura per compressione per la ghisa per m.m.q.

Ora il momento delle forze, che sollecitano CG rispetto alla sezione G è:

$$M = \frac{1}{32}\ pl^2 = 1081{,}50.$$

La somma delle forze comprimenti, ossia:

$$T_x = 6000.\ \cos.21{,}50 + 5283.\ \cos.18° +$$

$$+ \frac{1}{2} 500.\ 8{,}32.\ \text{sen}.21°{,}50' = 11457{,}65.$$

Prendendo per sezione del puntone un rettangolo di altezza b e di base $\frac{1}{2} b$, sarà:

$$\frac{hF}{2T} = \frac{3}{b}.$$

Ponendo tali valori nella (VI), si ha:

$$\frac{1}{2} b^2 = \frac{1}{R} \left\{ 11457,65 + \frac{3}{b} \, 1081 \right\}.$$

Se $R = 708000$ chilogrammi la sezione del puntone avrà l'altezza $b = 0^m,26$, quindi il puntone sarà un parallelepipedo di lunghezza $8^m,32$, con sezione rettangolare di 0,13 per 0,26.

§ 81. **Incavallatura a saette inclinate.** — I sia la mezza incavallatura BAI a saette inclinate composta del puntone BA, rinforzato dalle saette inclinate EI, DH, che nelle loro estremità vanno ad appoggiare contro il tirante AI orizzontale od inclinato. Altri tiranti verticali BI DH, servono a rinforzare le saette (*Fig.* 102).

Poniamo $AI = X$, $BAI = \alpha$, $BEI = \beta$.

Risultando isoscele per costruzione il triangolo DAH, ne seguirà $BDH = 2\alpha$.

Chiamo:

T, T', S, S' le tensioni dei tiranti orizzontali AH, HI e dei verticali EH, BI,

Q e Q' le pressioni sopportate dalle saette,

R' la reazione orizzontale, che ha luogo in B tra i puntoni.

Supponiamo che il puntone sia gravato di un peso p per unità di lunghezza sulla proiezione orizzontale.

Il puntone è una trave appoggiata in 4 punti equidistanti A, D, E e B, le loro reazioni dal § 32 sono nei punti A e B

$$= \frac{2}{15} pX \cos.\alpha,$$

e nei punti D ed E

$$= \frac{11}{30} pX \cos.\alpha.$$

La reazione verticale dell'appoggio A è:

$$V = pX \qquad (I).$$

Nel punto A per avere l'equilibrio dovrà la somma delle componenti normali al puntone delle forze V e T e della pressione $\frac{2}{15} pX \cos.\alpha$ essere eguale zero, quindi:

$$V \cos.\alpha - T \operatorname{sen}.\alpha = \frac{2}{15} pX \cos.\alpha,$$

dalla quale:

$$T = \frac{13}{15} pX \operatorname{cotg}.\alpha \qquad \text{(II)}.$$

Nel punto D poi se si decompone la pressione $\frac{11}{30} pX \cos.\alpha$ esercitatavi dal puntone in due altre dirette, una seconda AD e l'altra secondo l'asse della saetta DH, quest'ultima componente sarà la pressione chiamata Q, per cui:

$$Q = \frac{11}{30} pX \frac{\cos.\alpha}{\operatorname{sen}.2\alpha} = \frac{11}{60} \frac{pX}{\operatorname{sen}.\alpha} \qquad \text{(III)}.$$

Le forze T, T', Q ed S, che agiscono in H, dovranno farsi equilibrio, perchè tal punto stia fermo; dovranno perciò equilibrarsi anche le loro componenti orizzontali e verticali; si avranno cioè le due equazioni:

$$T - T' - Q \cos.\alpha = 0,$$

$$S - Q \operatorname{sen}.\alpha = 0.$$

Da queste risulta:

$$T' = T - Q \cos.\alpha = \frac{41}{60} pX \operatorname{cotg}.\alpha \qquad \text{(IV)},$$

$$S = Q \operatorname{sen}.\alpha = \frac{11}{60} pX \qquad \text{(V)}.$$

Nel punto E pure dovranno equilibrarsi le componenti normali

al puntone delle forze Q', S e la pressione $\frac{11}{30}pX\cos.\alpha$; per cui si avrà:

$$Q'\,\mathrm{sen}.\beta = S\cos.\alpha + \frac{11}{30}\,pX\cos.\alpha,$$

da cui:

$$Q' = \left(S\cos.\alpha + \frac{11}{30}\,pX\cos.\alpha\right)\frac{1}{\mathrm{sen}.\beta}.$$

Ponendo per S il suo valore, si ottiene:

$$Q' = \frac{11}{20}\,pX\,\frac{\cos.\alpha}{\mathrm{sen}.\beta} \qquad \text{(VI)}.$$

Questa pressione si potrà supporre applicata in I sul prolungamento della saetta EI, lo stesso dicasi per l'altra saetta simmetrica alla EI, posta nell'altra mezza incavallatura; segue da ciò che decomponendo ciascuna delle forze Q e Q' in due componenti, una seconda il tirante AI, l'altra verticalmente, le componenti secondo il tirante AI essendo eguali e contrarie si elideranno, mentre quelle dirette verticalmente produrranno la tensione del tirante BI.

Intanto dall'ispezione della figura 102 risulta che:

$$\cos.Q'Ii = \mathrm{sen}.\,(\beta - \alpha),$$

per cui la componente:

$$Ii = Q'\,\mathrm{sen}.\,(\beta - \alpha),$$

e la tensione cercata:

$$S' = 2Q'\,\mathrm{sen}.\,(\beta - \alpha) = \frac{11}{10}\,pX\,\frac{\cos.\alpha}{\mathrm{sen}.\beta}\,\mathrm{sen}.\,(\beta - \alpha) \qquad \text{(VII)}.$$

Rimane a determinare la reazione orizzontale R' del punto B. A tal fine si vede che le forze agenti in tal punto sono le tre $\frac{2}{15}pl\cos.\alpha$, la R' e finalmente $\frac{1}{2}S'$, giacchè l'altra metà di questa forza sarà sopportata dall'estremità dell'altro puntone.

La somma delle componenti normali ad AB di queste due ultime forze dovrà essere eguale e contraria alla prima ed avrassi:

$$R' \operatorname{sen.}\alpha - \frac{1}{2} S' \cos.\alpha = \frac{2}{15} pX \cos.\alpha,$$

dalla quale:

$$R' = \left\{ \frac{2}{15} pX \cos.\alpha + \frac{1}{2} S' \cos.\alpha \right\} \frac{1}{\operatorname{sen.}\alpha} \qquad \text{(VIII)}.$$

Le aree delle sezioni trasversali dei tiranti BI, EH, AH ed HI sono date dall'equazione $A = \frac{P}{K_1}$ quando si pongano per P successivamente i valori di S', S, T e T'.

L'area della sezione delle saette inclinate DH, ed EI è data da

$$A = (1 + \gamma) \frac{P}{K_2},$$

ponendo per P successivamente Q e Q'.

La sezione più pericolosa del puntone è nel punto D, il momento delle forze estrinseche, che sollecitano AD, rispetto al punto D è:

$$M_x = \frac{1}{90} pX^2.$$

La somma delle forze comprimenti tale sezione D è:

$$T_x = R' \cos.\alpha + Q \cos.2\alpha + Q' \cos.\beta + \frac{1}{2} S' \operatorname{sen.}\alpha + S \operatorname{sen.}\alpha.$$

Esprimendo con F l'area della sezione trasversale del puntone, ponendo per M_x e T_x i loro valori nella (V) del § 41, si ottiene:

$$R = \frac{h}{2} \frac{pX^2}{90\,T} + \frac{R' \cos.\alpha + Q \cos.2\alpha + Q' \cos.\beta + S \operatorname{sen.}\alpha}{F} + ;$$

$$+ \frac{S' \operatorname{sen.}\alpha}{2F} + \frac{2pX \operatorname{sen.}\alpha}{3F} \qquad \text{(IX)}.$$

Esempio. Un'incavallatura con quattro saette, tre tiranti verticali, ed una orizzontale lunga $12^m,60$ ha i puntoni inclinati di 25° coll'orizzontale (*Fig.* 103), si domandano:

a) le lunghezze dei puntoni, dei tiranti verticali e delle saette, gli angoli che queste ultime fanno colla direzione dei puntoni;

b) gli sforzi che devono sopportare le diverse parti componenti il cavalletto;

c) le dimensioni delle loro sezioni trasversali.

Ammesso che i puntoni debbano sopportare un peso di 250 chilogrammi per ogni metro corrente della loro proiezione orizzontale, i dati del problema sono:

$$p = 250, \quad X = 6{,}30, \quad \alpha = 25°.$$

Ora per essere il triangolo HDA isoscele, si ha:

$$DHA = DAH = 25°, \quad HDA = 180 - 50 = 130.$$

Il triangolo BIA è rettangolo, quindi:

$$IEB = HED = EHD = IBA = 90 - 25 = 65°.$$

La saetta HD farà col puntone AB l'angolo:

$$HDB = 180 - 130 = 50°.$$

Il tirante

$$IB = 6{,}30.\,\text{tang}.25° = 2{,}937.$$

Il tirante

$$EH = \frac{2}{3}\,2{,}937 = 1{,}958.$$

Il puntone

$$AB = \frac{6{,}30}{\cos.25} = \frac{6{,}3}{0{,}906} = 6{,}953.$$

La saetta

$$HD = DE = DA = \frac{1}{3} AB = 2{,}317.$$

Gli appoggi A ed A' devono resistere allo sforzo verticale:

$$V = 250.\, 6{,}3 = 1575 \text{ chilogrammi}.$$

La parte AH del tirante orizzontale deve resistere allo sforzo:

$$T = \frac{13}{15} 250.\, 6{,}3 \operatorname{cotang}.25 = 1365.\, 2{,}144 = 2926{,}56 \text{ chilogrammi},$$

che cimenta la resistenza all'estensione; la sua sezione circolare avrà il raggio:

$$r_1 = 0^m{,}0115.$$

In HI viene sviluppata la resistenza all'estensione dalla

$$T' = \frac{41}{60} 1575.\, 2{,}144 = 2307{,}375 \text{ chilogrammi};$$

la sua sezione circolare sarà di raggio:

$$r_2 = 0^m{,}011.$$

Il tirante verticale BI è sollecitato dalla forza verticale:

$$S' = \frac{11}{10} 1575 \text{ sen}.40° = 1112{,}265 \text{ chilogrammi},$$

diretta al basso; la sua sezione avrà il raggio:

$$r_3 = 0^m{,}008.$$

Il tirante HE si trova sotto l'azione della forza verticale:

$$S = \frac{11}{60} 1575 = 288{,}75,$$

e la sua sezione circolare avrà il raggio:

$$r_4 = 0{,}004,$$

quando non si faccia sopportare al ferro uno sforzo > 6 chilogrammi per m.m.q.

La saetta IE in ferro viene compressa dalla forza:

$$Q' = \frac{11}{20} 1575 = 866.25.$$

Se la sua sezione trasversale presenta la faccia di un semplice T con dimensione $\frac{40^{mm} - 40^{mm}}{5}$, allora il ferro non deve sopportare uno sforzo > 3 chilogrammi per m.m.q.

La sezione trasversale a semplice T della saetta HD potrà avere le dimensioni $\frac{30 - 30}{5}$, senza cimentare nel ferro una resistenza alla compressione > 3 chilogrammi per m.m.q., dovendo sopportare una pressione dalla forza:

$$Q = \frac{11}{60} \cdot \frac{1575}{0{,}422} = 684{,}2.$$

La spinta orizzontale dei puntoni nel vertice B è:

$$R' = \frac{\cos.25}{\text{sen}.25} \left\{ \frac{2}{15}\ 1575 + \frac{1}{2}\ 1112{,}26 \right\} = 1{,}23.\ 666 = 819{,}18 \text{ chilogr.}$$

La sezione più pericolosa D è compressa dalla forza:

$$T_x = 819{,}18 \cos.25^\circ + 684{,}2 \cos.50^\circ + 866{,}25 \cos.65^\circ +$$

$$+ 288{,}75 \text{ sen}.25^\circ + \frac{1}{2} 1112{,}26 \text{ sen}.25^\circ + \frac{2}{3} 1575 \text{ sen}.25^\circ =$$

$$= 2334{,}04 \text{ chilogrammi.}$$

Il momento delle forze estrinseche rispetto alla sezione D è:

$$M = \frac{1}{90} pX^2 = 110{,}25.$$

Ponendo nella (IX) del § 81 per T_x ed M i loro valori si riconosce, che dando al puntone una sezione a semplice T con dimensioni $\frac{60 \cdot 60}{5}$, il ferro deve resistere ad uno sforzo di chilogrammi 4,1 per m.m.q. di sezione.

II. Sia l'incavallatura BAD (*Fig.* 104) formata di due puntoni BA, AD collegati alla catena con più tiranti e saette. Questa si può considerare come una travata con parete a traliccio appoggiata alle due estremità e caricata di un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza. Nei puntoni e nelle saette viene cimentata la resistenza alla compressione, nei tiranti e nella catena la resistenza all'estensione.

Poniamo:

p il peso distribuito sopra ogni unità lineare,
X ed Y le lunghezze BC ed AC,
x ed y le lunghezze BF ed FE,
d la distanza di due tiranti successivi,
t la lunghezza della saetta,
A l'area della sezione trasversale dei puntoni,
F l'area della sezione trasversale della catena.

La pressione sopra ciascun appoggio è:

$$V = pX.$$

Consideriamo il mezzo cavalletto BAC, che possiamo snpporre fermato in AC e sollecitato nell'altra estremità dalla forza pX diretta dal basso all'alto, e nella sua lunghezza dal peso pX uniformemente distribuito.

Consideriamo la sezione EF posta a distanza x dall'estremo B; il momento delle forze estrinseche rispetto a questa sezione è:

$$M_x = pXx - \frac{1}{2}px^2 \qquad (1).$$

Rispetto alla sezione successiva HG il momento statico:

$$M_{d+x} = pX(x+d) - \frac{1}{2}p(x+d)^2 \qquad (2).$$

Se T_x è la forza, che cimenta la resistenza all'estensione nella sezione EF della catena, il momento della coppia delle forze intrinseche nella sezione EF della travata BAC è $T_x\,y$.

Così rispetto alla sezione GH, tale momento è $T_{x+d}y'$, posto $GH=y'$.

Per l'equilibrio dovranno avere luogo le seguenti eguaglianze:

$$T_x y = pXx - \frac{1}{2}px^2,$$

da cui:

$$T_x = \frac{px}{y}\left\{X - \frac{1}{2}x\right\} \qquad (3);$$

$$T_{x+d}y' = pX(x+d) - \frac{1}{2}p(x+d)^2,$$

da cui:

$$T_{x+d} = \frac{p(x+d)}{y'}\left\{X - \frac{1}{2}(x+d)\right\} \qquad (4).$$

Ora per la similitudine dei triangoli BEF, BHG avrà luogo la proporzione:

$$x : y = (x+d) : y',$$

da cui:

$$y' = y\frac{x+d}{x} \qquad (5).$$

Posto nella (4) per y' il valore (5) risulta:

$$T_{x+d} = \frac{px}{y}\left\{X - \frac{1}{2}(x+d)\right\} \qquad (6).$$

Sottraendo la (6) dalla (3), si ottiene:

$$T_x - T_{x+d} = \frac{py}{2y}d \qquad (7).$$

Questa forza $\frac{px}{2y}d$ si scomponga in due componenti, una diretta secondo KF, l'altra secondo FE.

La componente:

$$FN = \frac{px}{2y} d \frac{FN}{FG} = \frac{px}{2y} t = Q_x \qquad (X).$$

La componente:

$$FE = \frac{px}{2y} d \frac{FE}{FG} = \frac{px}{2y} y = \frac{px}{2} = S_x \qquad (XI).$$

La (X) dà il valore della forza, che comprime la saetta FK, la (XI) dà il valore della forza, che cimenta la resistenza all'estensione nel tirante FE.

Ora S cresce al crescere di x, quindi il tirante AC deve sopportare il massimo sforzo.

Nel valore di Q il rapporto $\frac{x}{y}$ è costante, ma t cresce al crescere di x, quindi la più vicina al tirante AC è sottoposta al maggiore sforzo di compressione.

Ponendo $\frac{x}{y} = \frac{X}{Y}$ il valore della forza, che cimenta la resistenza alla compressione nella sezione del puntone, e la resistenza alla estensione nella sezione della catena in FE posta a distanza x dall'estremo A è:

$$T_x = p \frac{X}{Y}\left(X - \frac{1}{2}x\right) \qquad (XII).$$

Nella sezione di mezzo:

$$T_x = p \frac{X^2}{2Y} \qquad (XIII).$$

Nella sezione estrema:

$$T_o = \frac{pX^2}{Y} \qquad (XIV).$$

La sezione trasversale dei puntoni, nei quali vien cimentata la resistenza alla compressione, avrà l'area:

$$A = \frac{1+\gamma}{K_2}\,\frac{pX^2}{Y} \qquad \text{(XV)}.$$

La sezione della catena avrà l'area·

$$F = \frac{1}{K_1}\,\frac{pX^2}{Y} \qquad \text{(XVI)}.$$

Per le saette si avrà l'area:

$$A' = \frac{1+\gamma}{K_2}\,Q_x \qquad \text{(XVII)}.$$

Per i tiranti l'area:

$$F' = \frac{1}{K_1}\,S_x \qquad \text{(XVIII)}.$$

Esempio. Un'armatura di $14^m,40$ di portata e $3^m,3552$ di saetta, rinforzata da sei saette inclinate e cinque tiranti verticali in ferro è caricata di un peso $2pX$ uniformemente distribuito sopra la sua proiezione orizzontale (*Fig.* 105).

Si domandano:

a) i valori degli sforzi, che devono sopportare le parti componenti il cavalletto;

b) le aree delle loro sezioni trasversali.

I dati del problema sono:

$$p = 250 \text{ chilogrammi}, \quad X = 7{,}20, \quad Y = 3{,}3552,$$

$$\frac{Y}{X} = 0{,}466, \quad \frac{X}{Y} = 2{,}144, \quad d = 1{,}80.$$

Esprimiamo con S', S'', S''' i valori delle tensioni sopportate da CD, EG, HF con F', F'', F''' le aree delle loro sezioni trasversali, si avrà:

$$S' = \frac{250}{2}\,3{,}6 = 450,$$

quindi:

$$F' = 75^{m.m.q} ;$$

$$S'' = \frac{1}{2} 250 . 5{,}4 = 675,$$

quindi:

$$F'' = 112^{m.m.q.}{,}5 ;$$

$$S''' = \frac{1}{2} 250 . 7{,}2 = 900,$$

quindi:

$$F''' = 150^{m.m.q.}$$

Chiamati Q', Q'' e Q''' gli sforzi, che devono sopportare le saette CB, ED ed HG, che hanno le lunghezze 2,019, 2,44 e 3,08, e con A', A'', A''' le aree delle loro sezioni trasversali, si avrà:

$$Q' = \frac{1}{2} 250 . 2{,}144 . 2{,}02 = 541{,}36,$$

quindi:

$$A' = 180^{m.m.q.}{,}44 ;$$

$$Q'' = 268 . 244 = 653{,}92,$$

quindi:

$$A'' = 217^{m.m.q.}{,}97 ;$$

$$Q''' = 268 . 3{,}08 = 825{,}44,$$

quindi:

$$A''' = 275^{m.m.q.}{,}1 .$$

Il valore del massimo sforzo, che cimenta la resistenza alla compressione nei puntoni, e la resistenza all'estensione nella catena è:

$$T = 250 \frac{X}{Y} . X = 250.2{,}144.7{,}2 = 3859{,}20,$$

quindi:

$$F = 643^{m.m.q.},2,$$

$$A = 1016^{m.m.q.}$$

§ 82. Armatura composta di una catena connessa a due puntoni e ad una sottocatena da più tiranti e saette. — Sia l'incavallatura BEE'D composta di due puntoni, di una catena e di una sottocatena rilegati da più tiranti verticali e saette inclinate e caricata di un peso P nel mezzo, di un peso pl uniformemente distribuito sopra la sua lunghezza l (*Fig.* 106).

Esprimiamo con X, Y le lunghezze BF ed FE, e con d la distanza di due tiranti successivi.

Rispetto alle parti estreme EFB, E'F'D valgono le eguaglianze poste nel precedente paragrafo, consideriamo la parte intermedia EFF'E'.

Il momento statico delle forze estrinseche rispetto ad una sezione HG posta a distanza x da un estremo è:

$$M_x = \frac{1}{2}(P + pl)\, x - \frac{1}{2} p x^2.$$

Il momento statico rispetto alla sezione KJ posta a distanza $x + d$ da un estremo è:

$$M_{x+d} = \frac{1}{2}(P + pl)\,(x + d) - \frac{1}{2} p\,(x + d)^2.$$

La differenza di questi due momenti è:

$$M_{x+d} - M_x = \frac{d}{2} \left\{ P + p\,(l - 2x) \right\}.$$

Il momento della coppia delle forze estrinseche nella sezione GH è $T_x Y$; quello nella sezione KJ è $T_{x+d} Y$, quindi per l'equilibrio:

$$T_{x+d} - T_x = \frac{1}{Y} \left\{ M_{x+d} - M_x \right\} = \frac{d}{2Y} \left\{ P + p(l-2x) \right\}.$$

Le tensioni nei punti G ed J si equilibreranno, quando si applichi nel punto G nella direzione GM una forza eguale a $T_{x+d} - T_x$.

La forza $T_{x+d} - T_x$ può essere sostituita dalle sue componenti GN, GH; la prima cimenta la resistenza alla compressione nella saetta GK, la seconda quella all'estensione in GH.

Dal parallelogramma GHMN, si ottiene:

$$GN = GM \frac{t}{d}, \quad GH = MG \frac{Y}{d}.$$

Posto per GM il suo valore $T_{x+d} - T_x$, si ottiene:

$$GN = Q_x = \frac{t}{d} \frac{d}{2Y} \left\{ P + p(l-2x) \right\} = \frac{t}{Y} \left\{ \frac{1}{2} P + p \left(\frac{1}{2} l - x \right) \right\} \quad \text{(I)},$$

$$GH = S_x = \frac{Y}{d} \frac{d}{2Y} \left\{ P + p(l-2x) \right\} = \frac{1}{2} P + p \left(\frac{1}{2} l - x \right) \quad \text{II)}.$$

Venne trovata l'equazione:

$$YT_x = M_x,$$

da cui:

$$T_x = \frac{M_x}{Y};$$

$$T_x = \frac{x}{2Y} \left\{ P + p(l-x) \right\} \quad \text{(III)}.$$

Nella sezione di mezzo della trave, ossia per $x = \frac{1}{2} l$,

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{4} \frac{l}{Y} \left\{ P + \frac{1}{2} pl \right\} \\ Q_0 &= \frac{t}{Y} \frac{P}{2} \\ S &= \frac{1}{2} P \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV)}.$$

Nei punti di appoggio, ossia per $x = 0$, dalla (X), (XI), (XII) del § 81, si ha:

$$\left.\begin{aligned} &Q = 0, \quad S = 0 \\ &T = \frac{X}{Y} \left\{ \frac{1}{2} P + pX \right\} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V)}.$$

I massimi valori di Q e di S corrispondono alla sezione avente l'ascissa $x = X$, quindi:

$$\left.\begin{aligned} Q &= \frac{t}{Y} \left\{ \frac{1}{2} P + p \left(\frac{1}{2} l - X \right) \right\} \\ S &= \frac{1}{2} P + p \left(\frac{1}{2} l - X \right) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI)}.$$

La sezione trasversale della sottocatena e dei puntoni, nei quali vien cimentata la resistenza alla compressione, avrà l'area:

$$A = \frac{1 + \gamma}{K_2} T \qquad \text{(VII)}.$$

La catena sottoposta all'estensione avrà la sezione:

$$F = \frac{T}{K_1} \qquad \text{(VIII)}.$$

Le saette avranno la sezione trasversale:

$$A_x = \frac{1+r}{K_2} Q_x \qquad \text{(IX)}.$$

I tiranti verticali presenteranno la sezione trasversale:

$$F_x = \frac{S_x}{K_1} \qquad \text{(X)}.$$

Dalle eguaglianze stabilite in questo paragrafo si potranno dedurre le seguenti conclusioni:

1° La tensione o la pressione in una sezione qualunque della parte inferiore o superiore dell'armatura eguaglia la somma dei momenti delle forze estrinseche rispetto alla sezione, che si considera, divisa per l'altezza della travata in quella sezione.

2° La tensione, che subisce ogni tirante verticale della parte AEFC è data dal peso distribuito tra il punto di mezzo e la sezione, che si considera.

3° Scomposta la forza, che cimenta la resistenza in un tirante in due componenti, una orizzontale, l'altra parallela alla saetta, questa seconda dà il valore della forza, che cimenta nella saetta la resistenza alla compressione.

Articolo IV. — Delle armature e dei cavalletti curvilinei.

§ 83. **Forma geometrica dei cavalletti curvilinei.** — Ai cavalletti curvilinei, quando sia nota la legge di distribuzione del carico, che hanno da sopportare, devesi dare forma tale, che la risultante delle forze agenti in ogni sezione, sia diretta tangenzialmente all'arco. Questa forma dicesi *linea di equilibrio dell'arco*.

Se il peso è distribuito uniformemente sopra la loro lunghezza, allora la linea di equilibrio è catenaria; se il peso è costante per ogni unità di lunghezza della loro proiezione orizzontale, allora la linea di equilibrio è la parabola.

Tali linee di equilibrio, la cui costruzione è imbarazzante nella pratica, per variare la curvatura da punto a punto, senza grave errore possono venire sostituite da curve policentriche, le quali poco si scostino dalle prime.

Negli archi a monta depressa, che presentano una saetta minore di $\frac{1}{10}$ della corda, l'arco di circolo poco differisce dagli archi della parabola e della catenaria, perciò il primo può essere tenuto come linea di equilibrio, sia il carico uniformemente distribuito sopra la lunghezza, come sopra la proiezione orizzontale dell'arco.

Quando il rapporto tra la corda e la saetta dell'arco è maggiore di $\frac{1}{10}$, allora devonsi trovare le posizioni dei centri e le lunghezze dei raggi degli archi circolari componenti la curva policentrica, che poco si allontana dalla linea di equilibrio, della quale si possono segnare alcuni punti, essendo nota la sua equazione.

§ 84. Procedimento grafico per sostituire una curva policentrica alla catenaria. — Sia $2X = BD$ la corda ed AC la saetta dell'arco BAD di catenaria, caricato di un peso p per ogni unità di lunghezza (*Fig.* 107).

Poniamo:

x ed y le coordinate di un punto qualunque della linea riferita agli assi AS, AO,

l la lunghezza del semi arco AB,

φ l'angolo della tangente nei punti estremi dell'arco coll'orizzontale,

r e ρ i raggi di curvatura alla chiave ed all'imposta degli archi,

V la pressione esercitata sopra ciascun appoggio,

H il valore della spinta orizzontale costante in tutti i punti dell'arco.

T' e T_x i valori delle forze, che esercitano uno schiacciamento nell'imposta ed in una sezione qualunque dell'arco.

Si divida $AS = X$ in quattro parti Aa_1, a_1a_2, a_2a_3, a_3S eguali a $0{,}25\,X$, colle eguaglianze stabilite nel § 61 si potranno trovare i valori delle ordinate y_1, y_2, y_3 corrispondenti alle ascisse $0{,}25\,X$. $0{,}50\,X$, $0{,}75\,X$ e segnare i punti b_1, b_2, b_3 della catenaria.

1° *Caso*. Per la saetta $Y = 0{,}512\,X$, si avrà:

$$y_1 = 0{,}33\,X, \quad y_2 = 0{,}13\,X, \quad y_3 = 0{,}27\,X,$$

$$r' = 1{,}05\,X, \quad \rho = 2{,}31\,X, \quad \varphi = 47°.$$

Prendasi $AM = r' = 1,05\,X$, $AO = 1,40\,X$, si conduca la normale $NN' = 2.ON = 2.0,10\,X$; si tirino le rette NMJ, N'MJ', si descriva e l'arco di circolo JAJ', avente il centro M, ed il raggio MA; e gli archi JD, J'B aventi i centri N, N' ed i raggi NJ, N'J'; la curva policentrica BJ'AJD così trovata graficamente poco si scosta dalla catenaria, che passa per i punti B, b_3, b_2, b_1, A, b_1, b_2, b_3, D.

L'arco di circonferenza, che passa per i punti B, A, D non si allontana di molto dall'arco di catenaria. Infatti il suo raggio:

$$r = \frac{X^2 + Y^2}{2Y} = 1,23\,X.$$

L'ordinata $a_2 m_2$ dell'arco di circolo corrispondente all'ascissa Aa_2 è 0,11 X, che è minore di $\frac{1}{50}$ X dalla $a_2 b_2 = 0,13\,X$.

Dalla 2ª tabella del § 61 si avrà per questo caso:

$$T' = 1,052\,pX + py \qquad (I),$$

$$T_x = 1,56\,pX \qquad (II),$$

$$H = 1,052\,pX \qquad (III).$$

2° *Caso*. Sia $Y = 0,75\,X$ (*Fig.* 108).

Le ordinate corrispondenti alle ascisse $x_1 = 0,25\,X$, $x_2 = 0,50\,X$, $x_3 = 0,75\,X$, sono:

$$y_1 = 0,042\,X, \quad y_2 = 0,168\,X, \quad y_3 = 0,39\,X,$$

alla chiave il raggio di curvatura

$$r' = 0,77\,X,$$

ed all'imposta il raggio di curvatura

$$\rho = 3X,$$

l'angolo della tangente all'imposta coll'orizzontale è:

$$\varphi = 59°.40'.$$

Con questi dati si potranno segnare i punti b_1, b_2, b_3 della catenaria, che poco si allontana dalla curva AJB formata degli archi AJ, JB aventi i centri nei punti M, N. La posizione di questi viene determinata prendendo $AM = 0,80\,X$, $MO = 0,65\,X$, e la normale $ON = 0,40\,X$.

L'arco di circolo in questo caso si scosta da BJA molto più del caso precedente.

Se il raggio $r = 1,04\,X$, la sua ordinata a_3m_3 differisce da a_3b_3 di $b_3m_3 = 0,07\,X$.

Posto nella (X) del § 61 l'ordinata $Y = 0,75\,X$, si ottiene:

$$T' = H + py \qquad \text{(IV)},$$

$$T_x = 1,52\,pX \qquad \text{(V)},$$

$$H = 0,77\,pX \qquad \text{(VI)}.$$

3° *Caso*. Sia la saetta $Y = X$ (*Fig.* 109).

Alle ascisse $x_1 = 0,25\,X$, $x_2 = 0,50\,X$, $x_3 = 0,75\,X$ corrispondono le ordinate $y_1 = 0,05\,X$, $y_2 = 0,208\,X$, $y_3 = 0,50\,X$.

Si prenda $AM = 0,70\,X$, $MO = 0,85\,X$; si conduca l'orizzontale $ON = 0,75\,X$, si descrivano gli archi AJ, JB aventi i punti M ed N per centri, l'arco AJB si confonde colla catenaria $Ab_1b_2b_3B$.

Il quarto di circolo AB, in questo caso, si allontana molto dalla linea di equilibrio; l'ordinata a_3m_3 è minore dell'ordinata a_3b_3 della quantità $b_3m_3 = 0,16\,X$.

Dalla (X) del § 61 si ottengono i seguenti valori:

$$T' = H + py \qquad \text{(VII)},$$

$$T_x = 1,618\,pX \qquad \text{(VIII)},$$

$$H = 0,618\,pX \qquad \text{(IX)}.$$

Seguendo lo stesso metodo si potranno trovare i valori delle ordinate corrispondenti alle ascisse di più punti della linea per diversi valori del rapporto $\frac{Y}{X}$, e determinare la curva policentrica che passa per essi.

Se l'arco AB ha più di due centri, allora la sua costruzione è più complicata, il suo tracciamento non è d'ordinario più facile di quello della catenaria.

§ 85. **Procedimento grafico per sostituire una curva policentrica all'arco di parabola.** — L'equazione della parabola, che passa per il punto B avente X ed Y per coordinate, è:

$$y = \frac{x^2}{X^2} Y \qquad (I),$$

la quale dà i valori delle ordinate y corrispondenti alle ascisse x.

1° *Caso.* Pongasi la saetta dell'arco AB (*Fig.* 110), ossia:

$$Y = 0{,}75\,X,$$

dalla (I) risulta:

$$y = \frac{3}{4}\frac{x^2}{X};$$

alle ascisse

$$x_1 = \frac{1}{4}X, \quad x_2 = \frac{1}{2}X, \quad x_3 = \frac{3}{4}X,$$

corrispondono le ordinate

$$y_1 = 0{,}047\,X, \quad y_2 = 0{,}187\,X, \quad y_3 = 0{,}422\,X.$$

Pongasi:

$$AM = 0{,}75\,X,$$

$$MO = 0{,}95\,X,$$

$$ON = 0{,}65\,X.$$

I punti M ed N saranno i centri degli archi AJ, JB, che passano per i punti b_1, b_2, b_3 aventi le coordinate x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3.

L'arco di circolo AB avente il centro sopra la AM si scosta molto dalla linea policentrica, che sostituisce la linea di equilibrio, l'ordinata a_3m_3 corrispondente all'ascissa Aa_3 differisce dalla A_3b_3 di $b_3m_3 = 0{,}10\,X$.

2° *Caso*. Pongasi $Y = X$ allora dalla (I) si troverà:

$$\text{per } x_1 = \frac{1}{4} X \quad \text{l'ordinata} \quad y_1 = 0{,}062\, X,$$

$$\text{per } x_2 = \frac{1}{2} X \quad \text{»} \quad y_2 = 0{,}25\, X,$$

$$\text{per } x_3 = \frac{3}{4} X \quad \text{»} \quad y_3 = 0{,}562\, X.$$

Prendasi:

$AM = 0{,}60\, X$, (*Fig.* 111).

$MO = 1{,}20\, X$,

$NO = 1{,}00\, X$.

La linea AJB composta degli archi di circolo AJ, JB aventi i centri nei punti M ed N si confonderà colla parabola, che passa per i punti b_1, b_2, b_3.

§ 86. **Cavalletto parabolico caricato di un peso uniformemente distribuito sopra la sua proiezione orizzontale.** — Sotto l'azione di tale sforzo il cavalletto BAD compresso, si dispone secondo la linea B*a*D, che supponiamo ancora parabolica (*Fig.* 112).

Esprimendo con X ed Y le lunghezze CD, CA, con V la pressione verticale, con H la spinta orizzontale dalle eguaglianze del § 47, si avrà:

$$V = pX \qquad \text{(I)},$$

$$H = \frac{pX^2}{2Y} \qquad \text{(II)}.$$

La pressione, che soffre la sezione dell'arco all'imposta, è:

$$T = \frac{pX}{2Y} \sqrt{\{X^2 + 4Y^2\}} \qquad \text{(III)}.$$

La lunghezza del mezzo arco di parabola è con molta approssimazione:

$$l = X + \frac{2}{3}\frac{Y^2}{X} \qquad (1).$$

Ponendo l'abbassamento $Aa = f$, e la lunghezza del mezzo arco $aD = l'$, si ottiene:

$$l' = X + \frac{2}{3}\frac{(Y-f)^2}{X} = X + \frac{2}{3}\frac{Y^2}{f} - \frac{4}{3}\frac{Yf}{X} \qquad (2),$$

quindi l'arco subisce l'accorciamento

$$l - l' = \frac{4}{3}\frac{Yf}{X} \qquad (3),$$

da cui:

$$f = \frac{3}{4}(l - l')\frac{X}{Y} \qquad (4).$$

L'accorciamento, che subisce l'arco sotto l'azione della forza T, che cimenta in esso la resistenza alla compressione nel § 7, venne trovato:

$$l - l' = \frac{1}{E}\frac{Tl}{A} \qquad (5),$$

essendo A l'area della sua sezione trasversale.

Per l'arco AT (*Fig.* 41) di parabola, si ha:

$x = HD$ l'ascissa del punto D,

d la lunghezza dell'archetto DF,

δ la sua proiezione orizzontale,

d' la lunghezza, che esso prende dopo la flessione, allora:

$$d - d' = \frac{1}{E}\frac{Td}{A} \qquad (6).$$

Dalla (9) del § 44 risulta:

$$d = \delta\left\{1 + \frac{2Y^2x^2}{X^4}\right\}.$$

Dalla (VII) del § 46, risulta:

$$T_x = \frac{pX^2}{2Y} \left\{ 1 + \frac{4Y^2x^2}{X^4} \right\}.$$

Ponendo per T e per d i loro valori nella (6) l'accorciamento

$$d - d' = \frac{1}{EA} \cdot \frac{pX^2}{2Y} \, \delta \left\{ 1 + \frac{4Y^2x^2}{X^4} \right\} \qquad (7).$$

Per avere il valore di AD — AE accorciamento dell'arco AD della figura 41, si divida x in un numero n grandissimo di parti eguali $a\delta$, si ponga per x successivamente 1δ, 2δ, 3δ . . . , $n\delta$; dalla somma di tutte le differenze parziali, si ottiene:

$$\overline{AD} - \overline{AE} = \frac{1}{EA} \frac{pX^2}{2Y} \left\{ x + \frac{4Y^2x^3}{3X^4} \right\} \qquad (8).$$

Per l'arco di parabola AD della figura 112 si ha AD = AB = l, aB = l' ed x = X, l'accorciamento

$$l - l' = \frac{1}{EA} \frac{pX^3}{2Y} \left\{ 1 + \frac{4Y^2}{3X^2} \right\} \qquad (9).$$

Ponendo nella (4) per $l - l'$ il valore dato da (9), si ottiene:

$$f = \frac{3pX^4}{8EAY^2} \left\{ 1 + \frac{4Y^2}{3X^2} \right\} \qquad (IV).$$

Nella seguente tavola sono registrati i valori di H, T ed f in funzione delle quantità p, X per dati rapporti di $\frac{Y}{X}$.

Rapporto di $\frac{Y}{X}$	Spinta orizzontale H	Pressione T negli appoggi	Abbassamento della chiave dell'arco f
$\frac{Y}{X}=\frac{1}{4}$	$H=2\,pX$	$T=2{,}236\,pX$	$f=6{,}50\,\frac{pX^2}{EA}$
$\frac{Y}{X}=\frac{1}{2}$	$H=pX$	$T=1{,}414\,pX$	$f=2{,}00\,\frac{pX^2}{EA}$
$\frac{Y}{X}=\frac{3}{4}$	$H=0{,}666\,pX$	$T=1{,}201\,pX$	$f=1{,}16\,\frac{pX^2}{EA}$
$\frac{Y}{X}=1$	$H=0{,}50\,pX$	$T=1{,}118\,pX$	$f=0{,}875\,\frac{pX^2}{EA}$

Per un prisma curvilineo inflesso l'equazione generale di stabilità

$$ET\left(\frac{1}{\rho'}-\frac{1}{\rho}\right)=\frac{RT}{\frac{1}{2}d}=M,$$

nella quale:

R è il coefficiente di resistenza,

T il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro,

d l'altezza della sezione,

M è il momento statico delle forze estrinseche rispetto alla sezione che si considera.

Rispetto alla chiave dell'arco, si ha:

$$\frac{RT}{\frac{1}{2}d}=\left[-pX^2+H(Y-f)+\frac{1}{2}pX^2\right].$$

Moltiplicato il primo ed il secondo membro per il reciproco di E' modulo d'elasticità rispetto alla compressione, e ponendo per H il suo valore si ha:

$$\frac{R}{E'}=-\frac{d}{2E'T}\,\frac{pX^2}{2Y}f=-\frac{dH}{2E'T}f.$$

accorciamento, che subisce l'unità di lunghezza del prisma per l'inflessione.

Sotto l'azione della spinta H, l'arco si raccorcia di $\frac{H}{AE}$, quindi per l'equilibrio, l'accorciamento proporzionale elastico

$$\frac{R}{E'} = \frac{H}{AE} + \frac{dH}{2ET} f,$$

da cui:

$$A = \frac{H}{R} \left\{ 1 + \frac{dA}{2T} f \right\} = \frac{H}{R} (1 + \delta) \qquad \text{(V).}$$

Poniamo il fattore $\frac{H}{EA}$ accorciamento, che subisce l'unità di lunghezza dell'arco per diretta pressione alla chiave eguale a λ, la sezione trasversale dell'arco BAD avrà l'area:

$$A = \frac{H}{K_2} \left\{ 1 + \lambda \frac{dA}{2T} \left(\frac{3X^2}{4Y} + Y \right) \right\} \qquad \text{(VI).}$$

Per la sezione rettangolare di altezza d

$$A = \frac{H}{K_2} \left\{ 1 + \lambda \frac{6}{d} \left(\frac{3X^2}{4Y} + Y \right) \right\} \qquad \text{(VII).}$$

Per la sezione a doppio T di altezza d

$$A = \frac{H}{K_2} \left\{ 1 + \lambda \frac{2d}{Z^2} \left(\frac{3X^2}{4Y} + Y \right) \right\} \qquad \text{(VIII).}$$

In pratica essendo gli archi formati di più cunei, si prende per il legno ed il ferro

$$\lambda = 0{,}002,$$

per la ghisa

$$\lambda = 0{,}009.$$

Ponendo tali valori per λ nelle (VII) ed (VIII), risulta:
Per gli archi di lunghezza $=1$ in legno od in ferro

a) di sezione rettangolare

$$d = \frac{H}{K_2} \left\{ 1 + \frac{0{,}012}{d} \left(\frac{3X^2}{4Y} + Y \right) \right\} \qquad \text{(IX)},$$

b) di sezione a doppio T

$$A = \frac{H}{K_2} \left\{ 1 + \frac{0{,}004\, d}{Z^2} \left(\frac{3X^2}{4Y} + Y \right) \right\} \qquad \text{(X)}.$$

Per gli archi in ghisa:

a) di sezione rettangolare

$$d = \frac{H}{K_2} \left\{ 1 + \frac{0{,}054}{d} \left(\frac{3X^2}{4Y} + Y \right) \right\} \qquad \text{(XI)},$$

b) di sezione a doppio T

$$A = \frac{H}{K_2} \left\{ 1 + 0{,}018\, \frac{d}{Z^2} \left(\frac{3X^2}{4Y} + Y \right) \right\} \qquad \text{(XII)}.$$

Nelle seguenti tavole si trovano i valori dell'altezza d e dell'area A della sezione di un arco per differenti valori del rapporto $\frac{Y}{X}$.

Per archi in legno od in ferro:

Rapporti della saetta alla semicorda $\frac{Y}{X}$	Sezione rettangolare (d)	Sezione a doppio T (A)
$\frac{Y}{X} = \frac{1}{4}$	$d = \frac{H}{K_2}\left(1 + 0{,}039\ \frac{X}{d}\right)$	$A = \frac{H}{K_2}\left(1 + 0{,}013\ \frac{dX}{Z^2}\right)$
$\frac{Y}{X} = \frac{1}{2}$	$d = \frac{H}{K_2}\left(1 + 0{,}024\ \frac{X}{d}\right)$	$A = \frac{H}{K_2}\left(1 + 0{,}008\ \frac{dX}{Z^2}\right)$
$\frac{Y}{X} = \frac{3}{4}$	$d = \frac{H}{K_2}\left(1 + 0{,}021\ \frac{X}{d}\right)$	$A = \frac{H}{K_2}\left(1 + 0{,}007\ \frac{dX}{Z^2}\right)$
$\frac{Y}{X} = 1$	$d = \frac{H}{K_2}\left(1 + 0{,}021\ \frac{X}{d}\right)$	$A = \frac{H}{K_2}\left(1 + 0{,}007\ \frac{dX}{Z^2}\right)$

Per archi in ghisa:

Rapporti della saetta alla semicorda $\frac{Y}{X}$	Sezione rettangolare d	Sezione a doppio T A
$\frac{Y}{X} = \frac{1}{4}$	$d = \frac{H}{K_2}\left(1 + 0{,}175\ \frac{X}{d}\right)$	$A = \frac{H}{K_2}\left(1 + 0{,}058\ \frac{dX}{Z^2}\right)$
$\frac{Y}{X} = \frac{1}{2}$	$d = \frac{H}{K_2}\left(1 + 0{,}108\ \frac{X}{d}\right)$	$A = \frac{H}{K_2}\left(1 + 0{,}036\ \frac{dX}{Z^2}\right)$
$\frac{Y}{X} = \frac{3}{4}$	$d = \frac{H}{K_2}\left(1 + 0{,}094\ \frac{X}{d}\right)$	$A = \frac{H}{K_2}\left(1 + 0{,}031\ \frac{dX}{Z^2}\right)$
$\frac{Y}{X} = 1$	$d = \frac{H}{K_2}\left(1 + 0{,}094\ \frac{X}{d}\right)$	$A = \frac{H}{K_2}\left(1 + 0{,}031\ \frac{dX}{Z^2}\right)$

Le precedenti eguaglianze e quelle registrate nelle seguenti Tabelle dànno i valori dell'altezza dell'arco riguardo alla fles-

sione, che subisce l'arco nel suo piano verticale. Per determinare le altre dimensioni della sezione trasversale dell'arco, si ricorre all'equazione generale di stabilità rispetto alla compressione:

$$A = (1 + \gamma) \frac{H}{K_1} \qquad \text{(XIII)}.$$

Le equazioni ora stabilite servono per trovare le dimensioni dell'arco alla chiave, quelle per la sezione dell'arco all'imposta si ottengono ponendo la pressione T invece di H.

Devesi qui notare, che per la flessione l'arco si innalza dal piano d'imposta, e non posa sopra questo che per una porzione della sua faccia di appoggio.

Esempio. Un arco parabolico in ghisa di sezione rettangolare di 44^m di portata, di 11^m di saetta debba sopportare un peso di 11700 chilogr. per unità di lunghezza della sua proiezione orizzontale; si domandano le dimensioni della sua sezione trasversale all'imposta ed alla chiave.

I dati del problema sono:

$$Y = 11^m, \quad X = 22^m, \quad \frac{Y}{X} = \frac{1}{2}, \quad p = 11700 \text{ chilogrammi}.$$

Nella chiave si eserciterà la pressione da

$$H = 22.11700 = 257400 \text{ chilogrammi}.$$

Nell'imposta la forza premente è:

$$T = 1,414.257400 = 363963.$$

Ponendo l'altezza della sezione alla chiave di $1^m,50$ il suo spessore dalla (VII) si troverà $= 0,15$, quando si ponga il coefficiente $K = 3$ chilogr. per m.m.q. Dando alla sezione d'imposta un'altezza di 2^m, il suo spessore sarà ancora di $0^m,15$.

§ 87. Incavallatura parabolica caricata del peso uniformemente distribuito sopra la sua proiezione orizzontale e dello sforzo verticale applicato in un punto posto a data distanza dell'asse. — Esprimiamo con V e V' (*Fig.* 113) le reazioni verticali degli appoggi B e D, che si oppongono ad ogni spostamento dei punti estremi dell'arco.

Venendo nell'arco cimentata la resistenza alla flessione, l'accorciamento subito dall'unità di lunghezza dell'arco ha il valore:

$$\frac{R}{E}=\frac{T_x}{AE}+\frac{h}{2ET}M,$$

da cui:

$$A=\frac{1}{R}\left\{T_x+\frac{hA}{2T}M\right\} \quad (1).$$

Nel § 47 si è trovato:

$$V=P\frac{X+z}{2X}+pX \quad (I),$$

$$V'=P\frac{X-z}{2X}+pX \quad (II),$$

il valore della spinta orizzontale

$$H=\frac{pX^2}{2Y}+\frac{5P}{64X^3Y}(5X^4-6X^2z^2+z^4) \quad (III),$$

la somma delle forze tangenziali

$$T_x=\frac{pX^2}{2Y}+\frac{PY}{X^3}(X+z)z+\frac{5P}{64X^3Y}(5X^4-6X^2z^2+z^4) \quad (IV).$$

Il carico uniformemente distribuito, non avendo alcuna influenza sopra la deformazione dell'arco, può essere trascurato nella determinazione del valore di M, momento statico delle forze che cimentano la resistenza alla flessione rispetto alla sezione E, quindi:

$$M=\frac{P(X+z)}{2X}(X-z)+\frac{H'Y}{X^2}(X^2-z^2) \quad (2),$$

nella quale H' è il valore che riceve H per $p=0$.

Posto per H' il suo valore, si ottiene:

$$M=\frac{P(X^2-z^2)}{64X^5}(7X^4+30X^2z^2-5z^4) \quad (3).$$

Ponendo nella (1) per M e per T_x i loro valori, si potrà avere l'area della sezione dell'arco.

Ora la (3) riceve il massimo valore per $z = 0{,}557\,X$, quindi il massimo valore di $M = 0{,}17\,PX$; la sezione più pericolosa dell'arco avrà l'area:

$$A = \frac{1}{R}\left\{T_x + \frac{hA}{2T}\,0{,}17\,PX\right\} \qquad (V).$$

Quando la distanza $z = \frac{1}{2}X$, allora:

$$A = \frac{1}{R}\left\{T_x + \frac{hA}{2T}\,8{,}186\,PX\right\} \qquad (VI),$$

$$H = \frac{PX^2}{2Y} + 0{,}278\,P\,\frac{X}{Y} \qquad (VII),$$

$$T_x = P\left\{\frac{3Y}{4X} + 0{,}278\frac{X}{Y}\right\} + \frac{pX^2}{2Y} \qquad (VIII).$$

Per sezione rettangolare di base b e di altezza h:

$$bh^2 = \frac{1}{R}\left\{T_x h + PX\right\} \qquad (IX).$$

Per sezione circolare di raggio r:

$$\pi r^2 = \frac{1}{R}\left\{T_x + 0{,}67\,\frac{PX}{r}\right\} \qquad (X).$$

Per sezione a doppio T avente per momento d'inerzia $= \frac{1}{4}\,AZ^2$, si ha:

$$A = \frac{1}{R}\left\{T_x + 0{,}333\,\frac{h}{Z^2}\,PX\right\} \qquad (XI).$$

Dalle equazioni del § 46 risulta lo spostamento orizzontale:

$$h = 0{,}018\,PX^2 \frac{Y}{ET}$$

l'abbassamento:

$$f = -0{,}011 \frac{PX^3}{ET} \qquad \text{(XII)}.$$

Se il carico P è applicato alla chiave, allora $z=0$, ed in tal caso, si ha:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{R}\left\{T_x + \frac{hA}{2T}\,0{,}11\,PX\right\} \\ H &= \frac{pX^2}{2Y} + \frac{25}{64}\,P\,\frac{X}{Y} \\ T_x &= \frac{pX^2}{2Y} + 0{,}39\,P\,\frac{X}{Y} \\ f &= -0{,}004\,\frac{PX^3}{ET} \\ h &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIII)}.$$

Quando il peso $p=0$, e la forza verticale P si trova applicata in un punto posto a distanza $z=\frac{3}{4}X$ dalla saetta, si avrà:

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{7}{8}P \\ V' &= \frac{1}{8}P \\ H &= 0{,}15\,P\,\frac{X}{Y} \\ T_x &= P\left\{1{,}312\,\frac{Y}{X} + 0{,}15\,\frac{X}{Y}\right\} \\ A &= \frac{1}{R}\left\{T_x + \frac{hA}{2T}\,0{,}152\,PX\right\} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV)}.$$

§ 88. **Cavalletto curvilineo avente per asse un arco di catenaria, caricato di un peso uniformemente distribuito nella sua lunghezza.** — L'arco BAD, che presenta la forma di catenaria, è caricato di un peso uniformemente distribuito sopra la sua lunghezza, per essere l'asse dell'armatura curvilinea una linea di equilibrio, le risultanti delle forze, che agiscono in ogni sezione, saranno dirette tangenzialmente all'asse dell'arco, il quale non avrà da sopportare che pressioni tangenziali.

Questa pressione tangenziale dal § 61 risulta:

$$T_x = H + py \qquad (1),$$

nella quale eguaglianza la grandezza y è l'ordinata o la distanza verticale della sezione, che si considera, dalla chiave, p è il carico sopportato dall'unità di lunghezza dell'arco.

Nella chiave l'ordinata $y = 0$, quindi:

$$T_1 = H \qquad (2).$$

Nell'imposta l'ordinata $y = Y$, quindi:

$$T = H + pY \qquad (3).$$

Per l'equilibrio la resistenza presentata dalla sezione deve eguagliare lo sforzo di compressione. La resistenza, che presenta la sezione A di un arco alle forze dirette parallelamente al suo asse è data dalla (V) del § 86; per l'equilibrio:

$$\frac{AK_1}{1+\delta} = T_x,$$

perciò l'area:

$$A = \frac{1+\delta}{K_1} T_x \qquad (I).$$

Si può supporre, che il coefficiente $1+\delta$ abbia lo stesso valore per tutte le sezioni dell'arco, quindi ponendo per T_x i valori (2) e (3), la sezione alla chiave avrà l'area:

$$A = \frac{1+\delta}{K_1} H \qquad (II),$$

e quella all'imposta avrà l'area:

$$A_1 = \frac{1+\delta}{K_2}(H + pY) \qquad \text{(III)}.$$

Nella seguente tavola sono registrati i valori di H, A ed A_1 per diversi valori del rapporto $\frac{Y}{X}$.

Rapporto della saetta Y alla semicorda X	Spinta orizzontale H	Sezione dell'arco alla chiave A	Sezione dell'arco all'imposta A_1
$Y = 0,25\,X$	$2\,pX$	$A = \frac{1+\delta}{K_2} 2\,pX$	$A_1 = \frac{1+\delta}{K_2} 2,25\,pX$
$Y = 0,51\,X$	$1,05\,pX$	$A = \frac{1+\delta}{K_2} 1,05pX$	$A_1 = \frac{1+\delta}{K_2} 1,56\,pX$
$Y = 0,75\,X$	$0,77\,pX$	$A = \frac{1+\delta}{K_2} 0,77pX$	$A_1 = \frac{1+\delta}{K_2} 1,52\,pX$
$Y = X$	$0,618\,pX$	$A = \frac{1+\delta}{K_2} 0,62pX$	$A_1 = \frac{1+\delta}{K_2} 1,62\,pX$

Il coefficiente $\frac{1+\delta}{K_2}$ dipende dal rapporto della più piccola dimensione dell'arco colla sua lunghezza, dal coefficiente di resistenza alla compressione e dal modulo di elasticità del materiale componente l'arco.

Esprimendo con l' la lunghezza dell'arco AB di catenaria dalla chiave all'imposta si ottiene:

per $Y = 0,51\,X$ $\quad l' = 1,146\,X \quad$ ed $\quad H = 0,916\,pl'$

per $Y = 0,75\,X$ $\quad l' = 1,31\,X \quad$ ed $\quad H = 0,588\,pl'$

per $Y = X$ $\quad l' = 1,49\,X \quad$ ed $\quad H = 0,413\,pl'$

L'arco di catenaria oltre al peso uniformemente distribuito è sollecitato da forza P applicata in un punto, che dista di $z = \frac{1}{2}X$ dalla saetta.

Per gli archi a monta depressa, per i quali la saetta è molto piccola rispetto alla corda, la catenaria poco differisce dalla parabola, quindi senza sensibile errore si può supporre dato dalla (III) del precedente paragrafo il valore della spinta orizzontale prodotta da P e dalla (3) del precedente paragrafo il valore del momento statico M.

Ponendo nelle (XII) e (XIII) del § 87 per $\frac{p\,X^2}{2\,Y}$ il valore pl' tang.α, spinta orizzontale del peso uniformemente distribuito, essendo α l'angolo della tangente in B coll'orizzontale si avrà:

$$H = pl' \text{ tang.}\alpha + 0{,}278\,P\frac{X}{Y} \qquad \text{(IV)},$$

$$T_x = pl' \text{ tang.}\alpha + P\left\{\frac{3}{4}\frac{Y}{X} + 0{,}278\frac{X}{Y}\right\}. \qquad \text{(V)}.$$

La sezione trasversale dell'arco avrà l'area:

$$A = \frac{1}{R}\left\{T_x + \frac{hA}{2T}\,0{,}166\,PX\right\} \qquad \text{(VI)}.$$

§ 89. Cavalletto circolare caricato di un peso uniformemente distribuito sopra la sua lunghezza. — L'armatura curvilinea BAC, caricata di un peso uniformemente distribuito sopra la sua lunghezza, abbia per asse una circonferenza di raggio X.

Esprimendo con p il peso collocato sopra l'unità di lunghezza del cavalletto, dalle eguaglianze del § 46 si ottiene la pressione verticale sopra gli appoggi

$$V = \frac{1}{2}pX\pi,$$

la spinta orizzontale:

$$H = 0{,}16\,pX\pi \qquad \text{(I)}.$$

Considerando l'arco come prisma, nel quale viene cimentata la resistenza alla flessione da forze, la cui risultante è obliqua all'asse, la sua sezione trasversale avrà l'area:

$$A = \frac{1}{R}\left\{T_x + \frac{hA}{2T}\,M\right\} \qquad \text{(1)}.$$

La pressione tangenziale nella sezione posta a distanza β dalla chiave, esprimendo con α l'arco di raggio 1, che misura AB risulta:

$$T_x = V \operatorname{sen}.\beta + H \cos.\beta - (\alpha - \beta) pX \operatorname{sen}.\beta.$$

Ora per $\alpha = \frac{\pi}{2}$, sen.$\alpha = 1$, cos.$\alpha = 0$; perciò ponendo per V e per H i loro valori, si ha:

$$T_x = \frac{pX\pi}{2}\ 0{,}64 \left(\frac{\cos.\beta}{2} + \beta \operatorname{sen}.\beta\right) \qquad (2).$$

Il momento statico delle forze estrinseche rispetto alla sezione posta a distanza β dalla chiave, essendo β l'arco di raggio $= 1$, che misura AE risulta:

$$M = \frac{pX\pi}{2} X \left\{0{,}96 \cos.\beta + 0{,}64\, \beta \operatorname{sen}.\beta - 1\right\} \qquad (3).$$

Ponendo nella (1) per M e per T_x i loro valori, si ottiene l'area

$$A = \frac{1}{R}\ \frac{pX\pi}{2} \left\{0{,}64\left(\frac{\cos.\beta}{2} + \beta \operatorname{sen}.\beta\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{hAX}{2T} (0{,}96 \cos.\beta + 0{,}64\, \beta \operatorname{sen}.\beta - 1)\right\} \qquad (II).$$

Il massimo valore di T_x è:

$$V = \frac{1}{2} pX\pi.$$

Il massimo valore di

$$M = 0{,}063 \frac{pX^2\pi}{2},$$

che si ottiene ponendo nella (3) l'angolo $\beta = 66°$.

Sostituendo nella (II) per T_x e per M i loro massimi valori, si ha:

$$A = \frac{1}{R} \frac{pX\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{hA}{2T} 0,063\,X \right\} \qquad \text{(III)},$$

per archi di sezione rettangolare di base b e di altezza h, si ha:

$$bh^2 = \frac{1}{R} \frac{pX\pi}{2} \left\{ h + 0,378\,X \right\} \qquad \text{(IV)}.$$

La sezione dell'arco alla chiave si ha ponendo nella (II) $\beta = 0$, perciò:

$$A' = \frac{1}{R} \frac{pX\pi}{2} \left\{ 0,32 + \frac{hA}{2T} 0,04\,X \right\} \qquad \text{(V)},$$

per sezione rettangolare di base b, di altezza h':

$$bh'^2 = \frac{1}{R} \frac{pX\pi}{2} \left\{ 0,32\,h + 0,24\,X \right\} \qquad \text{(VI)}.$$

L'abbassamento verticale della chiave è:

$$f = 0,0086 \frac{X^3}{ET} \frac{pX\pi}{2} \qquad \text{(VII)}.$$

Il massimo spostamento orizzontale, che ha luogo per la sezione dell'arco, che dista da 60° a 66° dalla chiave, ha il valore:

$$h = 0,0053 \frac{X^3}{ET} \left(\frac{pX\pi}{2} \right) = 0,62\,f \qquad \text{(VIII)}.$$

Nelle eguaglianze precedenti il termine $pX\pi$ esprime il peso, che gravita sopra la semicirconferenza, e $\frac{pX\pi}{2}$ esprime il peso che sollecita il quarto di circonferenza.

§ 90. **Cavalletto semicircolare caricato di un peso alla chiave.** — Dalle eguaglianze del § 48 si ha che sopra gli appoggi si eserciterà la pressione verticale:

$$V = \frac{1}{2} P \qquad (1),$$

la spinta orizzontale:

$$H = 0{,}32\,P \qquad (I).$$

Il mezzo arco AB si può supporre incastrato alla chiave e sollecitato nell'altra estremità dalle forze V ed H.

Rispetto alla sezione posta a distanza β dalla chiave, lo sforzo tangenziale:

$$T_x = V\,\text{sen}.\beta + H\cos.\beta = P\left\{\frac{1}{2}\,\text{sen}.\beta + 0{,}32\cos.\beta\right\} \qquad (II).$$

La somma dei momenti delle forze V e P rispetto alla sezione posta a distanza β dalla chiave è:

$$M = X\left\{-V\,(\text{sen}.90 - \text{sen}.\beta) + H\,(\cos.\beta - \cos.90)\right\} =$$

$$= PX\left(\frac{\text{sen}.\beta}{2} + 0{,}32\cos.\beta - \frac{1}{2}\right)\Big\} \qquad (2).$$

Nell'arco viene cimentata la resistenza alla flessione, la sua equazione di stabilità si ottiene ponendo per T_x e per M i loro valori nella (1) del precedente paragrafo, quindi:

$$A = \frac{P}{R}\left\{\frac{\text{sen}.\beta}{2} + 0{,}32\cos.\beta + \frac{hA}{2T}\,X\left(\frac{\text{sen}.\beta}{2} + 0{,}32\cos.\beta - \frac{1}{2}\right)\right\} \qquad (III).$$

Il valore di T_x è massimo per $\beta = 60°$, ponendo $\text{sen}.\beta = 0{,}86$, $\cos.\beta = 0{,}50$ si ottiene l'area:

$$A = \frac{P}{R}\left\{0{,}593 + 0{,}093\,X\,\frac{hA}{2T}\right\} \qquad (IV).$$

per sezione rettangolare:

$$bh^2 = \frac{P}{R} \left\{ 0{,}593\,h + 0{,}558\,X \right\} \qquad (IV)_a.$$

Nella chiave l'angolo $\beta = 0$ quindi la sezione:

$$\left.\begin{aligned} A' &= \frac{P}{R} \left\{ 0{,}32 + \frac{hA'}{2T}\, 0{,}16\,X \right\} \\ bh'^2 &= \frac{P}{R} \left\{ 0{,}32\,h' + 0{,}96\,X \right\} \end{aligned}\right\} \qquad (V).$$

L'abbassamento della chiave sotto l'azione della forza P ha il valore:

$$f = 0{,}018\,P\,\frac{X^3}{ET} \qquad (VI).$$

Il punto posto alla distanza di 60° dalla chiave si sposta orizzontalmente di

$$h = 0{,}0105\,P\,\frac{X^3}{ET} = 0{,}59\,f \qquad (VII).$$

Paragonando i valori trovati in questo paragrafo con quelli ottenuti nel § 87, si vede cha la spinta orizzontale esercitata da un arco di parabola avente la saetta $= \frac{1}{4}$ della corda è maggiore di quella esercitata dal semicircolo, e l'abbassamento della chiave è molto minore di quello, che ha luogo nel semicircolo. Il peso che applicato alla chiave di un arco di parabola vi produce la rottura è di $\frac{1}{3}$ maggiore di quello che produce la rottura nell'arco semicircolare.

§ 91. Forma degli archi e della sua influenza sopra la loro resistenza. — Se un arco è sollecitato da un carico permanente distribuito secondo una data legge, le direzioni delle risultanti delle forze, che agiscono in ogni sezione, fisseranno la forma della linea di equilibrio, la quale viene sostituita da una curva policentrica, che poco si scosta dalla prima. Nelle sezioni non viene cimentata che la resisteuza alla compressione, le loro dimensioni vengono determinate colle eguaglianze del § 51.

Se l'arco viene caricato da un peso accidentale, allora la direzione della risultante non coincide colla tangente alla linea di equilibrio determinata dalla legge di distribuzione del carico, ed in tal caso nell'arco viene cimentata contemporaneamente la resistenza alla compressione, e quella alla flessione. La prima viene sviluppata dalla componente tangenziale della risultante delle forze, che agiscono in ogni sezione, la seconda dalla componente normale.

La equazione di stabilità rispetto ad un arco, nel quale sono applicati carichi permanenti ed accidentali, viene determinata supponendo spplicato al punto dell'srco (avente la forma di una linea di equilibrio determinata dalla legge di distribuzione del carico) dal quale produce la massima flessione, il peso accidentale di maggiore intensità. Se l'arco presenta la forma di un arco di parabola o di catenaria, le sue dimensioni sono date nei §§ precedenti, dove si è supposto che il carico accidentale passi per il punto di mezzo della semicorda. Dalle eguaglianze del § 87 si vede che la resistenza cresce proporzionalmente alla larghezza, ed al quadrato dell'altezza, e lo spostamento orizzontale della sezione più pericolosa, e l'abbassamento, che subisce la chiave dell'arco, è in ragione inversa del cubo dell'altezza per sezione rettangolare.

Per sezione a doppio T a parità di area, la resistenza è molto maggiore.

Quando l'arco è lateralmente sottoposto all'azione orizzontale del vento, che tende a piegare l'arco come il peso accidentale P applicato in esso, le eguaglianze precedenti possono applicarsi in questo caso, quando si ponga per P una tal forza, la cui componente normale all'arco abbia il valore di quella della forza del vento, ed il suo punto di applicazione sia nella orizzontale passante per la metà della saetta.

CAPITOLO II.

COSTRUZIONI MURALI.

§ 92. **Cenni generali.** — Una costruzione murale è formata di psrti più o meno regolari semplicemente sovrapposte, oppure collegate fra loro da malte. Se la coesione e l'adesione presentate da queste sono maggiori della resistenza della pietra componente il muro, allora questo si considera come un monolito.

Quando la resistenza presentata dalla materia della pietra è

maggiore della coesione delle malte, allora in queste si manifesterà la rottura nel caso, in cui il masso murale si trovi sotto l'azione di forze, che tendano a separarne le parti.

D'ordinario le costruzioni murali constano di strati orizzontali paralleli, oppure inclinati, disposti in modo che i giunti di due strati successivi non siano corrispondenti.

La coesione dei cimenti è d'ordinario molto debole, anzi può venire meno col tempo per cause accidentali; sopra la resistenza dunque che essa presenta, il costruttore non può con sicurezza fare alcun conto. Le parti di una costruzione murale devono essere disposte in modo che la risultante delle forze, che cimentano uno strato, sia ortogonale a questo.

Le costruzioni murali si possono classificare:

1° In muri, che devono sopportare uno sforzo verticale.

2° In vôlti, ai quali devesi dare forma tale che le risultanti delle forze, che sollecitano le sezioni passino per i loro centri di gravità tangenzialmente all'asse del vôlto, che sarà una linea di equilibrio, dovendo sostenersi per reciproco contrasto.

3° In muri di sostegno, i quali devono resistere a sforzi verticali ed orizzontali, che tendono a rovesciare o staccare le parti componenti il muro.

Nel 1° e 2° caso i materiali sono sottoposti alla compressione, nel 3° caso la resistenza del muro dipende in gran parte dal peso, che gravita sopra lo strato base, oppure dall'attrito, che si sviluppa nella faccia, nella quale tende ad avere luogo distacco nelle parti componenti il muro.

Articolo I. — Muri assoggettati alla compressione.

§ 93. **Equazione di stabilità.** — Un muro composto di strati orizzontali di mattoni riuniti con malte, cede alla forza, che tende a schiacciarlo, quando è vinta la resistenza delle malte, oppure quella del materiale. Essendo la prima minore della seconda, si prenderà per coefficiente di resistenza alla rottura per pressione la forza capace di produrre la rottura nello strato di cemento, quando questa abbia fatto presa.

La compressione dei massi murali caricati di pesi può essere accompagnata da incurvamento, ed allora si ricorre alle equazioni stabilite nel Capitolo VII.

L'incurvamento, a parità di circostanze, è proporzionale al rapporto dell'altezza colla minore dimensione trasversale.

Dalle molte esperienze eseguite sopra pilastri in materiali laterizi, risulta il coefficiente $K_2 = 50$ chilogrammi per c.m.q., un

muro dunque, la cui sezione trasversale abbia l'area A, può sopportare uno sforzo

$$P = \frac{50\,A}{1+\gamma} \qquad (1).$$

Ponendo per i materiali laterizii

$$1+\gamma = 1+0{,}01\left(\frac{l}{d}\right)^2 = 1+0{,}01\,n^2,$$

si ottiene:

$$P = \frac{K_2 A}{1+0{,}01\,n^2} \qquad (I),$$

da cui l'area:

$$A = \frac{P\,(1+0{,}01\,n^2)}{K_2} \qquad (II),$$

nella quale:

P è il peso distribuito sopra la faccia superiore,

l l'altezza,

d la più piccola delle dimensioni trasversali.

In un muro, nel quale si tenga conto dell'incurvamento, il coefficiente di resistenza è dato da $\frac{K_2}{1+0{,}01\,n^2}$.

Posto G il peso proprio del masso, *g* il peso dell'unità di volume del masso murale, trascurando l'incurvamento, la sezione trasversale

$$A = \frac{P+G}{K_2} \qquad (III).$$

Per un corpo prismatico tutto il peso $G = Alg$, quindi:

$$A = \frac{1}{K_2}\left\{P + Alg\right\},$$

da cui:

$$P = A\,(K_2 - lg) \qquad (IV).$$

Per $lg = K_2$, il valore di $P = 0$, il muro sta per essere schiacciato dal suo proprio peso, e non potrà sopportare alcun carico.

Per la sezione posta alla metà dell'altezza del pilastro, sezione che riceve il massimo spostamento nell'incurvamento, si ha la equazione:

$$P = \frac{A}{1+\gamma} \left\{ K_2 - \frac{1}{2} lg \right\},$$

quindi:

$$A = \frac{1}{K_2} \left[(1+\gamma) P + \frac{1}{2} lAg \right] \qquad (V).$$

Esempio. Un pilastro in materiali laterizii di sezione rettangolare deve sopportare nella faccia superiore un peso di 5000 chilogrammi.

Si domandano le dimensioni della sezione trasversale, prendendo il coefficiente $K_2 = \frac{1}{10} 50$ chilogrammi per o.m.q. Il peso del metro cubo ossia $g = 2000$ chilogrammi, l'altezza $l = 4^m,00$, il lato minore del rettangolo ossia $d = 0,40$. Dalla (V) risulta:

$$0,40 x = \frac{1}{K_2} \left\{ \left(1 + 0,01 \frac{16}{0,16}\right) 5000 + \frac{1}{2} 4.\ 0,40.\ x.\ 2000 \right\},$$

da cui:

$$x = 0,543,$$

quindi la sezione trasversale del pilastro in mattoni sarà di 0,40 per 0,543.

Un muro di pietra naturale sia formato di conci disposti a strati diretti normalmente alla forza premente.

Se questa è verticale, gli strati sono orizzontali. Un pilastro formato di più conci presenta a parità di circostanze minore resistenza di quello composto di un sol blocco; se le faccie di appoggio non sono lavorate a pelle piana, la resistenza ne è ancora minore, non essendovi contatto che in alcuni punti della superficie e per essere in questa disegualmente distribuita la pressione. Nello stabilire dunque il coefficiente di resistenza alla rottura per pressione nei muri di pietra naturale, devesi tener conto e del numero dei conci e del grado di lavoratura subita dalle faccie di contatto. Se il muro è di un sol blocco, l'equazione di stabilità risulta:

$$P = \frac{K_2 A}{1 + 0{,}01 \frac{l^2}{d^2}} \qquad (VI).$$

Se è composto di più parti, allora del coefficiente K_2 si prende soltanto dai $\frac{3}{5}$ ai $\frac{4}{5}$ del suo valore.

Nella determinazione dell'equazione di stabilità, devesi por mente ai difetti di costruzione, cioè alla poca diligenza nella sovrapposizione delle pietre, alla mancanza di unione ed alla non perfetta verticalità della costruzione.

§ 94. **Forma di un muro di egual resistenza quando è sollecitato dal proprio peso.** — Un muro coll'asse verticale presenta nella faccia superiore lo spessore CD (*Fig.* 114), sotto l'azione del proprio peso le sue sezioni devono crescere dall'alto al basso, affinchè presenti la forma di solido di egual resistenza; quando si trascuri l'incurvamento, le aree delle sezioni successive possonsi trovare colla equazione stabilita nel § 6.

Per una lunghezza $= 1$ di masso murale, pongasi:

A l'area della faccia superiore,

y l'area di una sezione posta a distanza x dall'estremo CD,

l l'altezza del muro,

g il peso dell'unità di volume del corpo.

Risulta:

$$\log.y = \log.A + 0{,}434 \frac{gx}{K_2} \qquad (I).$$

Per l'area della faccia di base si ottiene:

$$\log.Y = \log.A + 0{,}434 \frac{gl}{K_2} \qquad (II).$$

Articolo II. — Vôlte a botte.

§ 95. **Cenni generali.** — Lo studio intorno all'equilibrio delle vôlte a botte si può dividere in due problemi:

1° Data la legge di distribuzione del carico, determinare l'asse della sezione retta del vôlto in modo, che tutti i giunti non abbiano che a sopportare uno sforzo di compressione. Trac-

ciata la linea di equilibrio del vôlto, sarà facile determinare le dimensioni colle equazioni stabilite nei paragrafi precedenti.

2° Data la legge di distribuzione del peso, e la forma dell'arco e le dimensioni del vôlto, verificarne la stabilità.

§ 96. Spinta orizzontale e pressione verticale esercitata sopra i piedritti da una vôlta avente per asse una linea di equilibrio. — La linea di equilibrio *mno* sia l'asse della fronte *ab*FDE di una vôlta a botte ed FHE rappresenti la base di un prisma in muratura, il cui peso eguaglia quello del sovraccarico, che deve sopportare (*Fig.* 115).

Si vogliono determinare i valori delle spinte e delle pressioni, che devono sopportare i piedritti.

Il piano verticale GH divide il vôlto in due parti simmetriche, di modo che GH passa per il centro di gravità di tutto il vôlto. S'immagini tolto il mezzo vôlto di destra, ed appoggiata la chiave di quello di sinistra al muro verticale CH. Poniamo:

V tutto il peso del semivolto CDF*a* e del mezzo sovraccarico DHF,

H la spinta orizzontale del vôlto,

T_x la forza, che cimenta il piedritto,

Y ed X la saetta e la semicorda dell'arco.

Per essere *mno* una linea di equilibrio la verticale MN passante per il centro di gravità di *mn*, la tangente M*m* nel punto *m*, e la tangente *no* devono incontrarsi nello stesso punto; ed i lati MN, MO, e la diagonale M*m* del parallelogramma MN*mo* saranno proporzionali alle forze V, H e T_x.

Esprimiamo con α l'angolo NM*m*, e con z la distanza N*m* del centro di gravità dell'arco *mn* dal piedritto, si avranno le proporzioni:

$$V : H = MN : Nm = 1 : \text{tang.}\alpha,$$

$$V : T_x = MN : Mm = \cos.\alpha : 1;$$

dalle quali:

$$V\,\text{tang.}\alpha = H \qquad (I),$$

$$T_x = \frac{V}{\cos.\alpha} \qquad (II).$$

Ora:

$$\text{tang.}\alpha = \frac{mN}{MN} = \frac{z}{Y},$$

perciò la spinta orizzontale:

$$H = V \frac{z}{Y} \qquad \text{(III)}.$$

Inoltre:

$$(mM)^2 = (MN)^2 + (Nm)^2,$$

quindi:

$$T_x = \sqrt{\{V^2 + H^2\}} = \sqrt{\left\{V^2 + V^2 \frac{z^2}{Y^2}\right\}} = V \sqrt{\left\{1 + \frac{z^2}{Y^2}\right\}} \qquad \text{(IV)}.$$

Il valore della spinta orizzontale H sarà dato dalla (III), quando siano noti i valori del carico V, della saetta Y, e della distanza z della verticale MN dal piedritto.

Essendo H una quantità costante, il prodotto V tang.α deve avere un eguale valore per tutti i punti dell'arco mn.

Rispetto al punto S dell'arco no, sia:

V' il peso, che gravita sopra il vôlto dalla chiave fino al piano verticale passante per S,

UT la verticale passante per il centro di gravità di nS, ed nU l'orizzontale condotta nella chiave n nell'arco,

α' l'angolo SUT che la linea SU forma colla verticale UT.

Rispetto al punto S si ottiene la spinta orizzontale

$$H' = V' \text{ tang.}\alpha$$

Per l'equilibrio del vôlto deve avere luogo l'eguaglianza

$$V \text{ tang.}\alpha = V' \text{ tang.}\alpha',$$

quindi sarà $\qquad H = H'.$

Dovendo la spinta orizzontale V tang.α avere un valore costante per tutti i punti dell'arco, i fattori V e tang.α varieranno da punto in punto, in modo però da dare un prodotto costante.

Per trovare il valore della spinta orizzontale H, si potranno considerare tutti i punti dell'arco, eccetto quello della chiave dove $V' = 0$, tang.$\alpha = 8$.

§ 97. **Linea di equilibrio delle vôlte a botte, estradossate parallelamente a se stesse e caricate di un peso uniformemente distribuito.** — Se le risultanti delle forze, che cimentano

le sezioni del vôlto coincidono in direzione colle tangenti ai punti degli archi *no* ed *nm*, allora le pietre componenti il vôlto non potranno spostarsi nè per rotazione intorno ad uno spigolo, nè per strisciamento. La linea di equilibrio *mno* è il luogo dei punti di applicazione delle risultanti delle forze sollecitanti le diverse sezioni, e le tangenti in tali punti rappresenteranno la loro direzione.

L'intensità di tali risultanti darà il valore della forza premente, dal quale si potranno dedurre le dimensioni della sezione premuta.

La forma geometrica degli archi viene determinata colle considerazioni fatte precedentemente per i cavalletti curvilinei, la linea di equilibrio si sostituisce con una curva policentrica, ed i giunti normali all'intradosso del vôlto saranno diretti ai centri degli archi.

La linea di equilibrio, per una vôlta estradossata parallelamente a se stessa, è un arco di catenaria o di parabola, secondo che il peso è uniformemente distribuito sopra la lunghezza o sopra la proiezione orizzontale dell'arco. Questi archi vengono nel modo indicato nel § 84 e nel § 85 sostituiti da una curva policentrica. Le diverse sezioni sviluppano la resistenza alla compressione, la loro area verrà data da

$$A = \frac{1}{K_2}\left\{T_x + \frac{dA}{2T} f\right\}.$$

Se A è un rettangolo di area d, essendo 1 la lunghezza del vôlto, si ha:

$$d = \frac{1}{K_2}\left(T_x + \frac{6H}{d} f\right) \qquad \text{(I)}.$$

Sostituendo per T_x ed H i valori posti nel § 84 e per f quelli trovati nel § 85, nei quali si ponga $\frac{K_2}{E} = \lambda$, che per i mattoni ha lo stesso valore, che per la ghisa, risulta:

$$\text{per } Y = \frac{1}{4}X, \qquad d = \frac{pX}{K_2}\left(2{,}25 + 0{,}35\frac{X}{d}\right) \qquad \text{(II)},$$

$$\text{per } Y = \frac{1}{2}X, \qquad d = \frac{pX}{K_2}\left(1{,}56 + 0{,}113\frac{X}{d}\right) \qquad \text{(III)},$$

per $Y = \frac{3}{4} X$, $$d = \frac{pX}{K_2}\left(1{,}52 + 0{,}072\,\frac{X}{d}\right) \qquad \text{(IV)},$$

per $Y = X$, $$d = \frac{pX}{K_2}\left(1{,}62 + 0{,}058\,\frac{X}{d}\right) \qquad \text{(V)}.$$

I valori dati dalle precedenti equazioni vengano accresciuti di una quantità D, che dai pratici si fa variare da $0^m{,}04$ a $0^m{,}08$.

Esprimendo con g il peso dell'unità di volume del materiale componente il vôlto, e con p' il sovraccarico per ogni unità di lunghezza dell'arco, risulta:

$$p = p' + gd.$$

Ponendo tale valore invece della (II), si ottiene:

$$d = \frac{X}{K_2 - 2{,}25\,gX}\left[2{,}25\,p' + 0{,}35\,X\left(g + \frac{p'}{d}\right)\right] \qquad \text{(VI)},$$

invece della (III):

$$d = \frac{X}{K_2 - 1{,}56\,gX}\left[1{,}56\,p' + 0{,}113\,X\left(g + \frac{p'}{d}\right)\right] \qquad \text{(VII)}.$$

e così di seguito.

Se nella (VI) il denominatore $K_2 - 2{,}25\,gX = 0$, allora il vôlto si rompe per l'azione del proprio peso qualunque sia il valore di d.

Osservazione. — Quando il peso non è distribuito uniformemente nè sopra la lunghezza nè sopra la proiezione orizzontale del vôlto, la linea di equilibrio viene determinata nel modo indicato nel § 66.

§ 98. **Metodi per verificare la stabilità delle vôlte a botte.** — Una vôlta a botte cede all'azione del proprio peso e del sovraccarico coll'aprirsi contemporaneamente nella chiave, nel giunto più pericoloso e nell'imposta, oppure collo staccarsi una parte dalla massa totale strisciando lungo il giunto che le separa, vincendo la forza di attrito o quella di coesione o quella di adesione delle malte.

In una vôlta a monta depressa avente un'ampiezza non maggiore di 120°, il giunto più pericoloso coincide col piano d'imposta, e l'apertura non si manifesta che nella sezione di mezzo, e nelle sezioni estreme della vôlta.

Una vôlta è stabile, quando non presenta pericolo di rottura nè per apertura nè per strisciamento.

Un giuuto non può aprirsi, ossia rotare intorno ad uno spigolo estremo, quando il momento delle forze, che lo sollecitano rispetto ad esso, è nullo oppure è negativo.

Lungo un giunto non può effettuarsi strisciamento, quando l'angolo della risultante delle forze sollecitanti colla normale alla faccia è minore dell'angolo di attrito.

Non avrà luogo nella vôlta rottura per schiacciamento, quando in ogni giunto la pressione massima per unità di area è minore del coefficiente di resistenza alla rottura per pressione.

Nel giunto, che è sul punto di aprirsi, la pressione è distribuita disegualmente, ed il suo valore, che è massimo nello spigolo intorno al quale tende a prodursi una rotazione, va diminuendo proporzionalmente alla distanza da tale spigolo.

In un triangolo, la cui base proporzionale alla pressione mssima, che soffre lo spigolo più premuto, e la cui altezza è proporzionale a quello del giunto, le lunghezze delle rette parallele alla base saranno proporzionali alle forze, che premono i diversi strati longitudinali, nei quali è stato diviso il giunto. Il centro di gravità di un triangolo è ad un terzo dell'altezza a partire dalla base, quindi il punto di applicazione della risultante delle forze, che cimentano un giunto, il quale sta per aprirsi, si trova ad un terzo dell'altezza a partire dallo spigolo, il quale soffre il massimo schiacciamento.

L'apertura in un giunto può manifestarsi sia all'intradosso che all'estradosso; sarà stabilità rispetto all'apertura, quando il punto di applicazione della forza sollecitaute si trova ad una distanza maggiore di $\frac{1}{3}$ dell'altezza dall'intradosso e dall'estradosso.

Il problema di verificare la stabilità del vôlto rispetto alla rottura per aprimento si riduce a trovare il luogo dei punti di applicazione delle risultanti forze sollecitanti i diversi giunti, linea detta curva delle pressioni, quando la chiave della vôlta tende ad aprirsi sia all'intradosso, sia all'estradosso.

La spinta orizzontale costante in tutti i punti dell'arco si può con grande applicazione prendere $= V \frac{z}{Y}$ nella quale:

V è il peso totale del vôlto e del sovraccarico,

z è la distanza della direzione della forza V dallo spigolo interno dell'imposta,

Y è la saetta del vôlto.

§ 99. Tracciamento della curva delle pressioni e valore della massima pressione esercitata sull'unità di area di ciascun giunto. — Sia ABCD la metà di una vôlta a botte di lunghezza $=1$ (*Fig.* 116). Dividiamola in parti colle c' d', c'' d'' . . . , dirette normalmente alla superficie d'intradosso, conduciamo le verticali Bβ, $c'\gamma'$, $c''\gamma''$ . . . , di lunghezza tale da potere i trapezii BC$'\gamma'\beta$, $c'c''\gamma''\gamma'$ . . . , considerarsi come basi dei prismi di altezza $=1$ in muratura, avente il peso dei carichi permanenti ed accidentali, che gravitano in Bc' $c'c''$, $c''c'''$ . . . .

Siano:

g_1, g_2, g_3, g_4 . . . , i centri di gravità delle figure A$\beta\gamma'd'$, $d'\gamma'\gamma''d''$, $d''\gamma''\gamma'''g'''$ . . . .

p_1, p_2, p_3, p_4 . . . , i pesi dei prismi aventi per basi le figure A$\beta\gamma'd'$, $d'd''\gamma''\gamma'$ . . . , e l'altezza $=1$.

π il peso dell'unità di volume della materia componente il vôlto ed il masso fittizio βLCB.

La spinta orizzontale H esercitata nella chiave AB si può con grande approssimazione ritenere data da V $\frac{z}{Y}$ nella quale:

V è il peso di tutto il solido βLCDA,

z è la distanza del centro di gravità della figura βLCDA dal punto di mezzo di CD,

Y è la saetta del vôlto.

$$\text{Prendasi BM} = \text{MN} = \text{NA} = \frac{1}{3}\text{AB}, \quad \text{CR} = \text{RS} = \text{SD} = \frac{1}{3}\text{CD}.$$

Le linee MR, NS che passano per i punti che dividono in tre parti le rette $c'd'$, $c''d''$ . . . , fisseranno i limiti dentro i quali deve trovarsi la curva delle pressioni, affinchè non vi sia pericolo di rottura per apertura.

Supponiamo che il vôlto nella chiave sia per aprirsi verso l'intradosso, la spinta orizzontale sarà applicata in M; da questo punto tirasi la orizzontale MO, e dal centro g_1 conducasi una verticale che sega la orizzontale MO nel punto h, prendansi le lunghezze ht ed hu proporzionali alle forze H e p', il punto d'incontro della diagonale v' del rettangolo avente ht ed hu per i lati con $c'd'$ è un punto della curva delle pressioni; così i punti d'intersezione della risultante v_2 di H e p_2 con c'' d'', della risultante v_3 di H e p_3 con c''' d''' ecc., apparterranno alla curva delle pressioni. Sostituendo nella (II) del § 56 successivamente

i valori delle componenti n_1, n_2, n_3 . . . , normali al giunti delle forze p_1, p_2, p_3 . . . , per u la distanza dal punto di applicazione di ciascuna di tali forze dallo spigolo, per C lo spessore del giunto corrispondente. Si troverà per ciascun giunto il valore di K, pressione massima sopra l'unità di area.

Queste operazioni si ripeteranno per il caso, in cui la spinta alla chiave sia applicata nel punto N. Si otterrà così un'altra curva delle pressioni; si avranno altri valori di K per ciascun giunto, vi sarà stabilità, se la prima è ancora compresa tra MR ed MS, e se i secondi sono minori del coefficiente di resistenza alla rottura per pressione.

Esempio. Un vôlto ABCD di un ponte con 20^m di corda, 4^m di saetta, con ampiezza di 87°,12' ha alla chiave lo spessore di 1^m, nella parte intermedia di 1^m,20; all'imposta di 1^m,40 (*Fig.* 117). Dovendo sopportare un sovraccarico rappresentato da un prisma di muratura, avente per base la figura BHMD e per altezza 1^m, si vuol verificare la stabilità rispetto all'apertura.

Scomponiamo il volto in 12 conci colle rette c_1d_1, c_2d_2, c_3d_3 ecc., concorrenti nel centro dell'arco, tiriamo le verticali c_1e_1 c_2e_2 . . . , queste divideranno le figure BHMD in tanti trapezii. Le aree di questi quadrilateri rappresenteranno i pesi gravitanti sopra Be_1, c_1c_2 . . . ; le aree delle figure Be_1, Be_2, B_3e_3 . . . avranno i valori dei pesi sopportati dai giunti c_1d_1, c_2d_2 . . . quando si prenda il peso del metro cubo di muratura eguale ad 1 chilogramma.

Nella tabella seguente sono registrate le aree delle figure parziali e le aree delle figure Be_1, Be_2 . . . non che le distanze delle verticali passanti per i loro centri di gravità dallo spigolo C.

Coi dati registrati sarà facile e trovare la spinta orizzontale, le risultanti delle forze sollecitanti i successivi giunti, e tracciare la curva delle pressioni, ossia il luogo dei loro punti di applicazione.

La spinta orizzontale con grande approssimazione è:

$$Q = 41,34 \frac{3,89}{4} = 40,20,$$

la quale sarà applicata in F ad $\frac{1}{3}$ della chiave AB dall'estradosso, quando si supponga, che l'arco stia per aprirsi alla chiave rotando intorno allo spigolo B.

Dal punto E si portano successivamente verso H le distanze segnate nella 10ª colonna della tabella; queste fisseranno sopra la orizzontale FO tanti punti, i quali saranno vertici di rettangoli

aventi il lato orizzontale costante proporzionale alla Q diretta da F verso E, ed il lato verticale dato dai successivi valori consegnati nella ottava colonna. Le lunghezze delle diagonali di questi rettangoli saranno proporzionali alle forze, che sollecitano i successivi giunti, ed i loro punti d'incontro coi rispettivi giunti apparterranno alla curva delle pressioni.

Così per segnare un punto per es. v nel giunto c_8d_8, che deve sopportare un peso di 24,81, il quale dista da C di $5^m,98$ si porta da E verso H una distanza $=5,98$, e per il punto S così trovato si costruisca il rettangolo SQBP, avente il lato $Q=40,20$, il lato $P=24,81$. La diagonale SB rappresenta l'intensità della forza, che sollecita c_8d_8, ed il suo punto di incontro v con c_8d_8 è un punto della curva delle pressioni.

Per trovare la massima pressione, che deve sopportare in ogni giunto il materiale nel momento in cui sta per aprirsi alla chiave rotando intorno allo spigolo di estradosso, si ricorre alla formola $K=V\frac{4c-6u}{c^2}$ trovata nel § 56, nella quale: V è la componente della forza diretta normalmente al giunto, c è lo spessore, u è la distanza del punto di applicazione di tale risultante dall'estradosso o dall'intradosso.

Nella chiave si ha: $c=1$, $u=0,33$, $V=40,20$, prendendo il peso del metro cubo di muratura eguale a 2000 chilogr., si ottiene: $K=16$ chilogr. per centimetro quadrato.

Nella sezione d'imposta:

$$V=57,\quad u=0,46,\quad c=1,40,$$

quindi:

$$K=57\,\frac{4.\,1,40-6.\,0,46}{\overline{1,4^2}}\,2000=164160,$$

ossia la massima pressione alla sezione d'imposta è di 16,5 chil. per c.m.q.

Osservazione. Per risolvere completamente il problema è necessario trovare il valore di K per tutti i giunti, e riconoscere se rimane sempre minore del coefficiente di resistenza alla rottura; inoltre ripetere tutta l'operazione, supponendo che il giunto alla chiave sia per rotare intorno allo spigolo d'intradosso.

N° d'ordine dei giunti (1)	PESI ELEMENTARI Larghezze (2)	Altezze medie (3)	Superficie (4)	Bracci di leva (5)	Momenti (6)	N° d'ordine dei giunti (7)	SOMME PARZIALI Superficie (8)	Momenti (9)	Bracci di leva (10)
1	1	2,75	2,75	9,50	26,12	1	2,75	26,12	9,50
2	1	2,85	2,85	8,50	24,22	1 + 2	5,60	50,34	8,99
3	1	3,00	3,00	7,50	22,50	1 + 2 + 3	8,60	72,84	8,47
4	1	3,20	3,20	6,50	20,80	1 + 2 + 3 + 4	11,80	93,64	7,93
5	1	3,45	3,45	5,50	18,97	1 + 2 + . . . + 5	15,25	112,61	7,38
6	1	3,70	3,70	4,50	16,65	1 + 2 + . . . + 6	18,95	129,26	6,82
7	0,725	3,95	2,86	3,64	10,41	1 + 2 + 3 + . . . + 7	21,81	139,67	6,40
8	0,725	4,15	3,00	2,91	8,73	1 + 2 + . . . + 8	24,81	148,40	5,98
9	0,85	4,40	3,74	2,13	7,96	1 + 2 + . . . + 9	28,55	156,36	5,47
10	0,85	4,70	4,00	1,28	5,12	1 + 2 + . . . + 10	32.55	161,48	4,95
11	0,85	5,05	4.29	0,42	1,80	1 + 2 + . . . + 11	36,84	163,28	4,43
12	1,00	4,50	4,50	— 0,50	— 2,25	1 + 2 + . . . + 12	41,34	161,03	3,89

§ 100. **Procedimento grafico per riconoscere la stabilità della vôlta rispetto allo strisciamento.** — In ogni giunto vi sarà stabilità rispetto alla rottura per scorrimento, quando la risultante delle forze forma colla normale al giunto un angolo, la cui tangente trigonometrica è minore od eguale al coefficiente di attrito. Ecco come si può graficamente riconoscerne la stabilità in tutti i giunti rispetto allo scorrimento (*Fig.* 118). Condotte le due rette MY, MX, una orizzontale, l'altra ad essa normale, si porti sopra la prima, la distanza MQ proporzionale alla spinta Q, e sopra la seconda i punti P_1, P_2, P_3, ecc., in modo da essere MP_1, MP_2, MP_3 . . . proporzionali ai pesi, che gravitano sopra i rispettivi giunti. Da Q si conduca la QZ parallela alla MX, e dai punti P_1, P_2, P_3 . . . si tirino parallele alla MY le quali intersecano QZ nei punti R_1, R_2, R_3, R_4 . . . Le rette MR_1, MR_2 . . . saranno proporzionali alle forze, che sollecitano i successivi giunti dalla chiave all'imposta.

Esprimendo con α_1, α_2, α_3 . . . gli angoli delle normali ai giunti colle forze che li sollecitano, si conducano le rette MS_1, MS_2 . . . , in modo da essere $R_1MS_1 = \alpha_1$, $R_2MS_2 = \alpha_2$ . . . , se gli angoli α_1, α_2 . . . sono minori dell'angolo di attrito, oppure se i rapporti $\frac{R_1S_1}{MR_1}$, $\frac{R_2S_2}{MR_2}$ . . . sono minori del coefficiente di attrito allora vi sarà stabilità in tutti i giunti rispetto allo scorrimento.

Articolo III. — Muri sollecitati da forze inclinate all'orizzontale.

I muri, che si oppongono allo scoscendimento del terreno; i piedritti, che sostengono le vôlte e ne ricevono l'azione e della spinta orizzontale e delle forze verticali, sono le principali costruzioni murali sollecitate da forze inclinate alla orizzontale, le quali vi sviluppano o la resistenza alla compressione, od allo scorrimento od al rovesciamento.

§ 101. **Piedritti che sostengono le vôlte.** — Sull'imposta, sia l'asse del vôlto una linea di equilibrio o circolare o policentrica, si esercita un'azione inclinata all'orizzontale; la sua componente verticale produce la pressione; la componente orizzontale, la spinta.

Supposta la vôlta prolungata nell'interno del piedritto, si potrà in questo disporre ciascuno strato normale alla direzione della forza sollecitante, in modo che il materiale non abbia a sopportare che uno sforzo di pressione; sarà facile allora stabilire l'equazione di equilibrio o quella di stabilità per ogni sezione.

Se la forza è obbliqua allo strato, allora si scompone in due componenti, una normale, l'altra parallela allo strato; se è assicurata la stabilità alla rotazione per essere zero oppure negativo il momento della risultante delle forze rispetto allo spigolo, intorno al quale tende ad avere luogo, allora entra in campo la forza di attrito, quando si trascuri la coesione o l'adesione delle malte.

Sia lo strato HF (*Fig.* 119) orizzontale, sia *mt* la forza, che sopra di esso agisce, *ms* la componente verticale, perciò normale ad HF. Poniamo:

β l'angolo *tms*, che la direzione della risultante forma colla verticale,

V il peso del mezzo vôlto e del sovraccarico,

v il peso di EHFC.

Rispetto ad HF la componente verticale della forza, che sollecita tale strato è $V+v$, la orizzontale $H=(V+v)\ \text{tang.}\beta$ tende a produrre scorrimento lungo HF, vincendo la forza di attrito:

$$(V+v)=(V+v)\ \text{tang.}\alpha$$

nella quale μ è il coefficiente di attrito, α ne è l'angolo.

Per l'equilibrio deve aver luogo l'equazione:

$$(V+v)\ \text{tang.}\beta=(V+v)\ \text{tang.}\alpha,$$

da cui:

$$\text{tang.}\alpha=\text{tang.}\beta \qquad \text{(I)},$$

per la stabilità:

$$\beta \overset{=}{<} \alpha \qquad \text{(II)},$$

per strato orizzontale, cioè la direzione della risultante delle forze colla verticale deve essere minore dell'angolo di attrito.

Ora per le pietre, l'angolo $\alpha=34°-39°$, quindi deve:

$$\beta \overset{=}{<} 34°-39°.$$

Se l'angolo *tms* è maggiore di 34° — 39°, allora negli strati orizzontali sarà vinta la forza di attrito; conviene dunque disporre gli strati in modo che la direzione della forza colla normale allo strato faccia un angolo minore di 34° — 39°.

§ 102. **Muri di sostegno.** — I muri di sostegno vengono nelle costruzioni impiegati per resistere alla spinta delle terre, la cui intensità e direzione verrà determinata nel capitolo IV. Diverse sono le forme date alle loro sezioni trasversali; ci occuperemo a stabilire le condizioni di equilibrio per sezione rettangolare: facile sarà il farne applicazione a qualunque altra forma di sezione trasversale.

La resistenza, che in questi viene sviluppata, è quella al rovesciamento; la forza, che lo produce, è orizzontale o inclinata verso l'alto o verso il basso.

Un muro di sezione rettangolare, di lunghezza $= 1$, sia formato di materiali riuniti con malte, la cui coesione è eguale o maggiore della resistenza delle pietre componenti il masso murale.

La forza orizzontale H (*Fig.* 120) applicata nel punto E tende a produrre uno staccamento nel masso murale lungo AJ, facendolo rotare intorno allo spigolo A. Poniamo:

$b = AB = CD$ spessore del muro,

$h = AC = BD$ altezza del muro,

g il peso dell'unità di volume della materia,

$z = AF = BE$ distanza del punto di applicazione E dalla base AB del muro.

Il momento (M) della forza H rispetto ad A è:

$$M = Hz \tag{1}$$

Il momento del peso del masso BCD rispetto ad A è

$$= bhg \cdot \frac{1}{2} b.$$

Il momento del peso di JAB è

$$= \frac{1}{2} b \,(JB)\, g \cdot \frac{2}{3} b$$

$$= \frac{1}{3} g b^3 \,\text{tang.}\alpha \tag{2},$$

quindi il momento di resistenza del peso sarà

$$= \frac{1}{2} b^2 h g - \frac{1}{3} b^3 g \,\text{tang.}\alpha = b^2 g \left\{ \frac{1}{2} h - \frac{1}{3} b \,\text{tang.}\alpha \right\}.$$

Per la stabilità risulta:

$$Hz = b^2 g \left\{ \frac{1}{2} h - \frac{1}{3} b \tan g.\alpha \right\} \qquad (I).$$

Per tang.$\alpha = 0$ la faccia di distacco coincide con la base, e risulta:

$$Hz = \frac{1}{2} b^2 h g \qquad (II),$$

da cui:

$$b = \sqrt{\left\{ \frac{2\,Hz}{hg} \right\}}.$$

Nel caso, in cui il muro è caricato nella faccia superiore di pesi aventi la risultante Q diretta secondo l'asse, allora risulta:

$$Hz = \frac{1}{2} bQ + \frac{1}{2} b^2 h g \qquad (III).$$

Se la forza H è applicata nell'estremità superiore del muro, $Q = 0$, tang.$\alpha = 0$, si ha:

$$H = \frac{1}{2} b^2 g \qquad (IV).$$

Se la forza, che sollecita il muro, è inclinata all'orizzontale, la si scompone in due componenti, una orizzontale, che agisce come la H, l'altra verticale che accresce o diminuisce il momento di resistenza del muro secondo che è diretta verso l'alto o verso il basso.

CAPITOLO III.

TRAVI PRINCIPALI DEI PONTI IN FERRO.

§ 103. **Cenni generali.** — Le travi principali dei ponti in ferro si possono considerare come prismi, i quali appoggiati alle due estremità ed in punti intermedii, vengono caricati sopra tutta oppure sopra una parte della loro lunghezza di pesi gli uni permanenti, gli altri accidentali, detti sovraccarichi. La loro se-

zione trasversale è un doppio T simmetrico, ed è formata di due tavole rettilinee o curvilinee composte di lamiere sovrapposte, le quali, mediante ferri d'angolo, si connettono alla parete sia piena che a traliccio. Questa ha per scopo di mantenere ad eguale distanza le parti estreme, ed è l'organo di trasmissione delle tensioni e delle pressioni dall'una all'altra tavola.

Le dimensioni delle due tavole vengono determinate facendo astrazione dalla parete; quindi la questione che ora prendiamo a svolgere, intorno alle travi principali dei ponti in ferro, si può dividere in due problemi.

1° Determinare il numero delle lamiere di data sezione trasversale da sovrapporsi per la formazione delle due tavole di una trave appoggiata a due o più punti, affinchè non si incurvino al di là del limite dell'elasticità sotto l'azione delle forze, che tendono ad infletterle.

2° Trovare lo spessore della parete piena, o le dimensioni delle parti componenti il traliccio, affinchè resistano agli sforzi, che tendono a produrre la rottura per scorrimento trasversale.

§ 104. Trovare la legge di distribuzione delle lamiere, di data sezione trasversale, nelle tavole componenti una trave appoggiata alle due estremità e caricata di un peso uniformemente distribuito sopra la sua lunghezza.

Esprimiamo con p il peso permanente, con p' il sovraccarico distribuito sopra ogni unità lineare; poniamo $q = p + p'$. Sotto l'azione di tale sforzo, le due tavole si inflettono, ed i movimenti subìti dall'una vengono dalla parete trasmessi all'altra. Sia $2l$ la distanza orizzontale dei due appoggi, M il momento statico delle forze estrinseche rispetto alla sezione, che si considera, W il suo momento di resistenza: si avrà l'equazione generale di stabilità $M = W$.

Ora i valori di M relativi alle diverse sezioni sono proporzionali, come si è visto nel § 36, alle ordinate della parabola $y = -\frac{1}{2} q x^2$ il cui vertice, posto sopra la perpendicolare condotta dal punto di mezzo di AB alla retta AB, dista di $\frac{1}{2} q l^2$ dalla linea degli appoggi (*Fig.* 121).

Condotta la retta AB lunga tante unità prese sopra la scala delle distanze orizzontali, quante ve ne sono nel numero $2l$, si tiri per il punto di mezzo della orizzontale AB, la verticale CV, la quale contenga tante unità prese sopra la scala dei momenti inflettenti, quante ve ne sono nel numero $\frac{1}{2} q l^2$: il punto V

sarà il vertice della parabola, la quale deve passare per i punti A e B.

Sarà facile descrivere la parabola AVB avente $\frac{2}{q}$ per parametro, servendosi delle sue proprietà.

Il momento W di resistenza eguaglia la somma $\omega_1 + n\omega_2$, essendo ω_1 il momento di resistenza dei ferri d'angolo, che uniscono le tavole alla parete, ω_2 il momento di resistenza di due lamiere di sezione trasversale nota, poste ad una distanza eguale all'altezza della trave, n il numero delle lamiere sovrapposte nella tavola superiore, oppure nella inferiore.

I valori di ω_1 e di ω_2 dati dall'espressione $\frac{2\,\mathrm{RT}}{h}$, sono noti, conoscendo l'altezza della trave, le dimensioni delle sezioni e dei ferri d'angolo e delle lamiere.

Si tirino nel disegno parallelamente ad AB le rette ab, a_1b_1, a_2b_2 . . . , le quali distino dal piano degli appoggi successivamente di tante unità prese sopra la scala dei momenti inflettenti, quante ve ne sono nei numeri ω_1, $\omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 + 2\omega_2$ . . .

Si avviluppi la parabola AVC colla linea poligonale A 1 2 3 . . . ad angoli retti, i cui vertici si scostano un po' dalla linea dei momenti inflettenti: questa rappresenterà la legge di distribuzione delle lamiere nelle tavole; e dalla figura si vede che per la resistenza nel tratto 1-2 i ferri d'angolo devono essere coperti da una sola lamiera, nel 2-3 da due lamiere ecc., e la trave presenterà una forma, la quale si avvicina a quella di un solido di eguale resistenza.

Esempio. Poniamo $2l = 60^m$, l'altezza h della trave eguale a 5^m, $q = 3$ tonellate, l'equazione della parabola dei momenti inflettenti M sarà $y = \frac{3}{2}x^2$, perciò il massimo valore di M relativo alla sezione di mezzo sarà di 1350 tonell. met.

Rispetto ai ferri d'angolo aventi le dimensioni $\frac{100^{mm} - 100^{mm}}{16^{mm}}$ si ottiene $\omega_1 = 160$ tonell. met.; le lamiere di sezione rettangolare di $1000^{mm} \times 10^{mm}$ dànno il momento di resistenza $\omega_2 = 302$ tonell. met. Dalla figura 122, nella quale venne tracciata la parabola dei momenti inflettenti, e si sono condotte le parallele ab, a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 ed a_4b_4 alla linea AB successivamente alle distanze 160, 160 + 302, 160 + 604, 160 + 906, 160 + 1208 unità di momenti inflettenti dall'orizzontale passante per i punti di appoggio, si vede, come devono essere distribuite le lamiere nelle due tavole.

§ 105. **Tracciamento della linea inviluppo dei momenti inflettenti e determinazione della legge di distribuzione delle lamiere nelle tavole di una trave appoggiata a più punti.** — In un ponte in ferro a più campate, ogni travata si può supporre successivamente vuota e caricata; nel primo caso non avrà a sopportare che il peso proprio, nel secondo a questo devesi aggiungere il sovraccarico, il quale si tiene come uniformemente distribuito. Per il passaggio di un convoglio o di due consecutivi sopra un ponte per strada ad un binario, o di due contemporaneamente sopra un ponte per strada a due binarii, facile sarà determinare il numero totale delle ipotesi, che si possono fare per la distribuzione dei sovraccarichi sopra un numero n di travate. Se si suppone, che una sola travata riceva il sovraccarico, allora si devono contare n ipotesi distinte, potendo ciascuna travata essere quella alla quale è attribuita. Nel caso in cui due sono le travate cariche, il numero delle ipotesi corrispondenti eguaglia il numero $\frac{n(n-1)}{2}$ delle combinazioni di n oggetti presi due a due: per tre campate cariche il numero delle ipotesi è $\frac{n(n-1)\ (n-2)}{1.2.3}$ così di seguito fino al caso, in cui si suppone che sopra tutte le travate è distribuito il sovraccarico, il che non può farsi, che in un sol modo.

Il numero totale delle ipotesi distinte sarà eguale alla somma

$$n+\frac{n\,(n-1)}{1.2}+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}+\ldots+1=2^n-1,$$

il quale numero diviene minore, quando le travate sono disposte simmetricamente rispetto al mezzo.

Per ciascuna ipotesi potremo col metodo tenuto nel § 34 trovare i valori dei momenti inflettenti relativi alle sezioni di appoggio; le ascisse delle sezioni rispetto alle quali i momenti M sono nulli, e di quelle alle quali corrispondono i massimi valori di M; le espressioni generali di μ relative ad ogni scompartimento.

Con questi valori registrati in apposite tabelle, colle sagome paraboliche aventi l'una per equazione $y=-\frac{1}{2}px^2$, l'altra $y=-\frac{1}{2}qx^2$, si potranno sopra un disegno descrivere le parabole, le cui ordinate sono proporzionali ai valori di M, per ciascuna ipotesi.

Riportate al disopra dell'orizzontale passante per gli appoggi tutte le parti di parabola poste al disotto, si potrà segnare lo inviluppo delle linee paraboliche dei momenti inflettenti relative alle diverse ipotesi.

Trovato il valore di ω_1 momento di resistenza dei ferri d'angolo, che uniscono le tavole alla parete, quello di ω_2 momento di resistenza di due lamiere di data sezione trasversale, poste tra di loro ad una distanza eguale all'altezza della trave, si conducano nel disegno parallelamente alla orizzontale passante per i punti di appoggio le rette, che distano da quella successivamente delle quantità ω_1, $\omega_1 + 2\omega_2$, $\omega_1 + 3\omega_2$ ecc., ecc.; si avviluppi la linea inviluppo dei momenti inflettenti in una linea poligonale ad angoli retti; da questa si potrà dedurre il modo di distribuire le lamiere sopra le due tavole.

Esempio. Una trave in ferro lunga 80^m, alta 5^m, sia appoggiata nelle due estremità, e nella sezione di mezzo.

Pongasi il peso permanente $p = 2000$ chilogr., il sovraccarico $p' = 4000$ chilogrammi, sarà il peso totale $q = 2000 + 4000 = 6000$ chilogrammi.

Essendo la trave simmetrica rispetto all'appoggio di mezzo, basteranno due ipotesi, nella prima delle quali si suppone il sovraccarico distribuito sopra una sola campata, nella seconda si tiene il sovraccarico distribuito sopra tutta la lunghezza della trave.

Nella tabella seguente sono registrati i valori dei momenti inflettenti relativi alle sezioni di appoggio, le ascisse dei punti ai quali corrispondono i valori nulli e quelli massimi dei momenti inflettenti per ciascuna ipotesi, e nella figura 123, dove sono descritte le linee dei momenti inflettenti, si vede, come devono essere distribuite le lamiere lungo le due tavole, supponendo che i ferri d'angolo abbiano le dimensioni di $\frac{100^{mm} - 100^{mm}}{16^{mm}}$ e le lamiere sieno rettangolari di 1000×10, quando si prenda per coefficiente di resistenza alla rottura riferita all'unità di area, ossia $R = 6$ chilogr. per m.m.q.

$p = 2000$, $p' = 4000$, $q = p + p' = 6000$, $l = 40$.

N° d'ordine degli appoggi	Momenti inflettenti nelle sezioni di appoggio	N° d'ordine delle travate	Espressione generale dei momenti inflettenti in ciascuna travata	Ascisse dei punti di inflessione	Ascisse dei centri delle sezioni di massimo momento inflettente	Massimo momento inflettente positivo
Per la travata AB caricata dal peso q, la BC da p:						
1	$m_1 = 0$					
		1	$\mu = 100000\,x - 3000\,x^2$	$x_1 = 0$, $x_2 = 33{,}33$	$x = 16{,}66$	$\mu_m = 833700$
2	$m_2 = -800000$					
		2	$\mu = -800000 + 60000\,x - 1000\,x^2$	$x_1 = 20$, $x_2 = 40$	$x = 30$	$\mu_m = 100000$
3	$m_3 = 0$					
Per la travata AB caricata dal peso p, e la BC dal peso q:						
1	$m_1 = 0$					
		1	$\mu = 20000\,x - 1000\,x^2$	$x_1 = 0$, $x_2 = 20$	$x = 10$	$\mu_m = 100000$
2	$m_2 = -800000$					
		2	$\mu = -800000 + 140000\,x - 3000\,x^2$	$x_1 = 6{,}66\ldots$, $x_2 = 40$	$x = 23{,}333$	$\mu_m = 833700$
3	$m_3 = 0$					
Per il carico q distribuito sopra tutta la lunghezza della trave:						
1	$m_1 = 0$					
		1	$\mu_1 = 90000\,x - 3000\,x^2$	$x_1 = 0$, $x_2 = 30$	$x = 15$	$\mu_m = 675000$
2	$m_2 = -1200000$					
		2	$\mu_2 = -1200000 + 150000\,x - 3000\,x^2$	$x_1 = 10$, $x_2 = 40$	$x = 25$	$\mu_m = 675000$
3	$m_3 = 0$					

§ 106. **Altro metodo più approssimativo e più rapido.** — Al signor Bresse siamo debitori, per il calcolo delle tavole, che compongono una trave principale di un ponte in ferro a più aperture, di un metodo meno lungo e meno faticoso. Di questo, presentato con notevoli semplificazioni dal prof. Curioni alla Società degli Ingegneri ed Industriali di Torino, parleremo in questo paragrafo, facendone applicazione alle tavole del ponte di Mezzanacorte.

1° *Il principio, sopra il quale si fonda il suddetto metodo*, si può enunciare in questi termini: in una trave longitudinale di un ponte in ferro a travate rettilinee, l'effetto prodotto in una sezione qualunque dal carico permanente, e dall'insieme dei sovraccarichi esistenti sopra diverse travate, è la somma algebrica degli effetti parziali, che isolatamente produrrebbe nella sezione, che si considera, ciascuno dei carichi supposti agire parzialmente. Segue da ciò, che nel considerare l'azione del sovraccarico sopra una trave, lo si deve considerare come agente isolatamente sopra ciascuna campata; l'effetto finale sarà dato dalla somma degli effetti parziali. Risulta dunque, che il calcolo dei ponti in ferro resta assai diminuito, non dovendo fare che tante ipotesi, quante sono le campate più una, che corrisponde all'ipotesi del carico permanente, mentre col metodo esposto nel precedente paragrafo, il numero delle ipotesi è $2^n - 1$.

2° *Linee dei momenti inflettenti.* L'equazione generale dei momenti inflettenti relativi alle sezioni di una travata qualunque è:

$$\mu = M + Nx - \frac{1}{2} px^2.$$

Nel caso in cui questa non debba sopportare sovraccarico, si può tenere $p = 0$; e l'equazione dei momenti inflettenti si trasformerà nella $\mu = M + Nx$, la quale indica, che i valori dei momenti inflettenti per le travate scariche sono proporzionali alle ordinate di una retta.

Nella equazione tra i momenti inflettenti relativi alle sezioni poste sopra 3 appoggi successivi, quando i due estremi comprendano due travate scariche, si può porre $p' = 0$, $p'' = 0$; in tal modo vengono semplificate e le equazioni determinatrici dei momenti inflettenti relativi alle sezioni di appoggio, e le espressioni generali dei momenti inflettenti, e le costruzioni delle linee, le cui ordinate sono proporzionali ai valori di M relativi alle sezioni della trave.

Sia una trave appoggiata ad n punti (*Fig.* 124); supponiamo che sia la k la travata carica, ed esprimiamo con q il peso distribuito sopra l'unità lineare della sua lunghezza; poniamo:

$m_1, m_2, m_3 \ldots m_{k-1}, m_k, m_{k+1} \ldots m_{n-1}, m_n$ i valori di M relativi alle sezioni successive A, B, C, D ... degli appoggi,

$l_1, l_2, l_3 \ldots l_{n-1}$ le lunghezze delle successive travate.

Dal teorema dei tre momenti si potranno stabilire le seguenti equazioni:

$$2(l_1+l_2)+\frac{m_3}{m_2}l_2=0 \qquad (1),$$

$$\frac{m_2}{m_3}l_2+2(l_2+l_3)+\frac{m_4}{m_3}l_3=0 \qquad (2),$$

$$\frac{m_3}{m_4}l_3+2(l_3+l_4)+\frac{m_5}{m_4}l_4=0 \qquad (3),$$

. . . .

$$\frac{m_{k-2}}{m_{k-1}}l_{k-2}+2(l_{k-2}+l_{k-1})+l_{k-1}\frac{m_k}{m_{k-1}}=0 \qquad (k-2),$$

$$\frac{m_{k-1}}{m_k}l_{k-1}+2(l_{k-1}+l_k)+l_k\frac{m_{k+1}}{m_k}+\frac{1}{4}ql^3_k\frac{1}{m_k}=0 \quad (k-1),$$

$$\frac{m_k}{m_{k+1}}l_k+2(l_k+l_{k+1})+l_{k+1}\frac{m_{k+2}}{m_{k+1}}+\frac{1}{4}ql^3_k\frac{1}{m_{k+1}}=0 \quad (k),$$

. . . .

$$l_{n-2}\frac{m_{n-2}}{m_{n-1}}+2(l_{n-2}+l_{n-1})=0 \qquad (n-2).$$

L'equazione determinatrice dei momenti inflettenti delle diverse sezioni della travata k è:

$$\mu=m_k+\left(\frac{1}{2}ql_k+\frac{m_{k+1}-m_k}{l_k}\right)x-\frac{1}{2}qx^2.$$

dalla quale si vede, che i valori dei momenti m_k. m_{k+1} sono negativi, quando si prendono positivi quelli relativi alle sezioni poste tra i punti aventi le ascisse x_1, x_2, alle quali corrisponde $\mu = 0$. Dalle equazioni precedenti si vede, che i momenti m_{k-1}, m_{k-2} . . . , e quelli m_{k+2}, m_{k+3} . . . , sono alternativamente positivi e negativi; quindi alla destra ed alla sinistra della travata carica, k i momenti inflettenti relativi alle sezioni di appoggio sono alternativamente positivi e negativi.

Se il carico passa successivamente nelle campate poste alla destra della k, i rapporti $\frac{m_3}{m_2}$, $\frac{m_4}{m_3}$ . . . , $\frac{m_k}{m_{k-1}}$ avranno costantemente lo stesso valore; le rette, le cui ordinate sono proporzionali ai momenti inflettenti relativi alle sezioni delle travate scariche poste alla sinistra della k, divideranno le distanze dei due appoggi successivi in parti proporzionali ai detti rapporti; ossia in ciascuno dei tratti AB, BC, CD . . . , vi ha un punto, per il quale passano le rette dei momenti inflettenti, quando il carico si mantiene alla destra della campata k, questo punto lo chiameremo *punto di concorso per il sovraccarico alla destra.*

Nello stesso modo si trova in ciascuna delle campate un *punto di concorso per il sovraccarico alla sinistra.*

Quindi tracciata la parabola dei momenti inflettenti per la campata carica, segnati i punti di concorso e per il sovraccarico alla destra e per il sovraccarico alla sinistra in ciascuna travata, facilmente si potranno condurre le rette dei momenti inflettenti per le travate scariche.

3° *Determinazione e tracciamento dell'inviluppo utile dei momenti inflettenti.* L'inviluppo utile dei momenti inflettenti, ossia la curva le cui ordinate rappresentano i massimi valori dei momenti inflettenti relativi alle diverse sezioni di una trave appoggiata a più punti, caricata di un peso permanente uniformemente distribuito sopra la sua lunghezza e di un sovraccarico, che cangia continuamente di posizione, si può ottenere col seguente processo:

a) Supposta carica la prima travata, si trovano:

i momenti inflettenti relativi alle sezioni di appoggio,

le equazioni delle linee dei momenti inflettenti in ciascuna travata,

le ascisse dei punti d'incontro dell'asse della trave con le linee dei momenti inflettenti, le quali sono rette per tutte le campate ad eccezione della prima, la quale ha per linea dei momenti inflettenti una parabola.

b) Supposta carica l'ultima campata, si trovano:

i momenti inflettenti relativi alle sezioni di appoggio.

le equazioni delle linee dei M. I. in ciascuna travata,

le ascisse dei puuti d'incontro dell'asse della trave con le dette linee.

I risultati ottenuti con queste due ipotesi renderanno note le posizioni dei punti di concorso in ciascuna travata e per il sovraccarico a destra e per il sovraccarico a sinistra.

c) Supposto il sovraccarico successivamente sopra la seconda, sopra la terza . . . , sopra la penultima campata, si determinano per ciascuna ipotesi:

i momenti inflettenti relativi alle sezioni di appoggio,

le equazioni delle linee dei M. I. in ciascuna travata,

le ascisse dei punti d'incontro dell'asse della trave con la parabola dei M. I. relativi alle sezioni della travata carica.

d) Considerato il carico permanente distribuito sopra la lunghezza della intera trave, si deducano:

i corrispondenti M. I. relativi alle sezioni degli appoggi,

le espressioni delle parabole dei M. I. in ciascuna travata,

le ascisse dei punti d'incontro di tali linee coll'asse della trave.

e) Si costruiscono poscia le linee, le cui ordinate sono proporzionali ai valori dei momenti inflettenti per ciascuna delle accennate ipotesi.

f) Trovansi in ciascuna travata per la linea inviluppo dei momenti inflettenti positivi, e per quella dei momenti inflettenti negativi:

le ordinate relative ai punti d'incontro delle linee dei M. I. coll'asse della trave,

le ordinate corrispondenti ai punti di mezzo degli appoggi,

le ordinate dei punti di massima altezza dell'inviluppo dei momenti inflettenti e positivi.

Queste ordinate si ottengono dalla somma dei valori ottenuti per le accennate sezioni in ciascuna ipotesi.

g) Segnansi nel disegno i punti appartenenti alla linea inviluppo dei momenti inflettenti positivi, e quelli corrispondenti alla linea inviluppo dei momenti inflettenti negativi.

h) Deducesi finalmente la curva inviluppo utile riportando dalla parte, verso cui esiste la curva inviluppo dei momenti inflettenti positivi, le porzioni di inviluppo dei M. I. negativi, le quali trovansi tra gli appoggi e le perpendicolari all'asse della trave, elevate nei punti d'incontro delle parabole del carico permanente coll'asse della trave.

Tracciata la linea inviluppo utile dei momenti inflettenti, sarà poi facile lo studio della distribuzione delle lamiere lungo le due tavole.

§ 107. Determinazione e tracciamento dell'inviluppo utile dei momenti inflettenti in un caso particolare. — Sia una trave appoggiata a 6 punti posti ad eguale distanza l'uno dall'altro; per essere simmetrica rispetto alla sezione di mezzo, saranno sufficienti tre ipotesi oltre al caso del peso permanente uniformemente distribuito sopra tutta la lunghezza, si supporrà cioè il sovraccarico nella prima, poi nella seconda, ed infine nella terza travata.

Sia l la lunghezza di ciascuna campata, ed esprimasi con p e p' il carico permanente ed il sovraccarico per metro lineare del ponte:

1ª *Ipotesi.* Chiamando con m_1', m_2', m_3', m_4', m_5', m_6' i momenti inflettenti sopra i sei appoggi in questa ipotesi, ed esprimendo con μ_1', μ_2', μ_3', μ_4' e μ_5' i momenti relativi ad una sezione qualunque della 1ª, 2ª, 3ª, 4ª e 5ª campata, si ottengono le seguenti equazioni:

$$4\,lm_2' + lm_3' + \frac{1}{4}\,l^3p' = 0,$$

$$lm_2' + 4\,lm_3' + lm_4' = 0,$$

$$lm_3' + 4\,lm_4' + lm_5' = 0,$$

$$lm_4' + 4\,lm = 0;$$

dalle quali:

$$m_1' = 0, \quad m_2' = -\frac{14}{209}\,a^2p', \quad m_3' = \frac{15}{836}\,a^2p',$$

$$m_4' = -\frac{1}{209}\,a^2p', \quad m_5' = \frac{1}{836}\,a^2p', \quad m_6' = 0.$$

Le espressioni dei momenti inflettenti in ciascuna travata saranno:

$$\mu_1' = p'\left(\frac{181}{418}\,lx - \frac{1}{2}\,x^2\right),$$

$$\mu_2' = p'\,\frac{71\,lx - 56\,l^2}{836},$$

$$\mu_3' = p' \frac{15\,l^2 - 19\,lx}{836},$$

$$\mu_4' = p' \frac{5\,lx - 4\,l^2}{836},$$

$$\mu_5' = p' \frac{l^2 - lx}{836}.$$

Dalla prima si ha il valore dell'ascissa del punto d'incontro della parabola coll'asse della trave, dalle altre si hanno le ascisse dei punti di concorso per il sovraccarico alla sinistra.

2ª *Ipotesi*. Chiaminsi m_1'', m_2'', m_3'', m_4'', m_5'' e m_6'' i momenti inflettenti sopra i successivi sei appoggi, μ_1'', μ_2'', μ_3'', μ_4'' e μ_5'' le espressioni generali dei M. I. in ciascuna travata. Si avranno le equazioni:

$$4\,lm_2'' + m_3''l + \frac{1}{4}\,l^3p' = 0,$$

$$m_2''l + 4\,lm_3'' + m_4''l + \frac{1}{4}\,l^3p' = 0,$$

$$m_3''l + 4\,lm_4'' + m_5''\,l = 0,$$

$$m_4''l + 4\,lm_5'' = 0,$$

da cui:

$$m_1'' = 0, \quad m_2'' = -\frac{41}{836}\,l^2p', \quad m_3'' = -\frac{45}{836}\,l^2p',$$

$$m_4'' = \frac{3}{209}\,l^2p', \quad m_5'' = -\frac{3}{836}\,l^2p', \quad m_6'' = 0.$$

Sostituendo tali valori nell'espressione generale

$$\mu = \mathrm{M} + \mathrm{N}x - \frac{1}{2}\,qx^2,$$

si ottiene:

$$\mu_1'' = -p' \frac{41}{836} \, lx,$$

$$\mu_2'' = p' \left(\frac{414 \, lx - 41 \, l^2}{836} - \frac{1}{2} x^2 \right),$$

$$\mu_3'' = p' \frac{57 \, lx - 45 \, l^2}{836},$$

$$\mu_4'' = p' \frac{12 \, l^2 - 15 \, lx}{836},$$

$$\mu_5'' = p' \frac{3 \, lx - 3 \, l^2}{836};$$

dalle quali si ricavano facilmente le ascisse dei punti singolari.

3ª *Ipotesi.* Dicendo m_1''', m_2''', m_3''', m_4''', m_5''', m_6''' i momenti inflettenti sopra i successivi sei appoggi, e μ_1''', μ_2''', μ_3''', μ_4''', μ_5''' i momenti inflettenti relativi alla 1ª, 2ª, 3ª, 4ª e 5ª campata, si ha:

$$4 \, m_2''' l + m_3''' l = 0,$$

$$m_2''' l + 4 \, l m_3''' + m_4''' l + \frac{1}{4} l^2 p' = 0,$$

$$m_3''' l + 4 \, l m_4''' + m_5''' l + \frac{1}{4} l^2 p' = 0,$$

$$m_4''' l + 4 \, l m_5''' = 0,$$

d'onde:

$$m_1''' \quad 0, \quad m_2''' = \frac{1}{76} l^2 p', \quad m_3''' = -\frac{1}{19} l^2 p',$$

$$m_4''' \quad -\frac{1}{19} l^2 p', \quad m_5''' = \frac{1}{76} l^2 p', \quad m_6''' = 0,$$

quindi sostituendo si ottiene:

$$\mu_1''' = \mu_5''' = p' \frac{lx}{76},$$

$$\mu_2''' = \mu_4''' = p' \frac{l^2 - 5\,lx}{76},$$

$$\mu_3 = p' \left(\frac{x^2}{2} + \frac{lx}{2} - \frac{l^2}{19}\right).$$

Carico permanente. Poniamo m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 e m_6 i momenti inflettenti relativi alle sezioni poste sopra gli appoggi μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 e μ_5 le espressioni generali dei M. I. in ciascuna travata, si ottiene:

$$m_1 = m_6 = 0,$$

$$m_2 = m_5 = -\frac{22}{209}\,l^2 p,$$

$$m_3 = m_4 = -\frac{33}{418}\,l^2 p.$$

Ponendo tali valori nell'espressione generale di μ, si ha:

$$\mu_1 = \mu_5 = p\left(\frac{165}{418}\,lx - \frac{1}{2}\,x^2\right),$$

$$\mu\ = \mu_4 = p\ \left(\frac{110}{209}\ lx - \frac{1}{2}x^2 - \frac{22}{209}\,l^2\right),$$

$$\mu_3 = p\left(\frac{1}{2}\,lx - \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{33}{418}\ l^2\right).$$

Esempio. Applichiamo il metodo del sig. Bresse e le formule ottenute ad una delle travi del ponte di Mezzanacorte, che è appoggiata a 6 punti posti alla distanza di 76^m,10 l'uno dall'altro.

Il sovraccarico per metro lineare di ponte è $p' = 5870$ chilogr.; il peso permanente $p = 4410$ chilogrammi.

Nelle tabelle seguenti sono registrati i valori ottenuti e nella figura 125, la quale ne è la rappresentazione grafica, si vede come devono essere distribuite le lamiere nelle tavole, essendo la loro sezione rettangolare di 1200×15, ed avendo la trave l'altezza di $7^m,50$ (*).

(*) Questo esempio venne estratto dalla relazione pubblicata dall'Ing. Edoardo Piane.

Momenti infle

Distanze dall'asse della semi-pila addossata alla spalla all'asse della prima pila	Valori dei momenti inflettenti					
	1ª ipotesi	2ª ipotesi	3ª ipotesi	4ª ipotesi	5ª ipotesi	Carico permanent
$x = 0$	0	0	0	0	0	0
$x = 9{,}82$	275,382	— 36,649	9,832	— 2,687	0,896	185,3
$x = 10{,}72$	295,597	— 40,008	10,733	— 2,933	0,978	198,7
$x = 16{,}24$	403,288	— 60,609	16,261	— 4,440	1,480	267,4
$x = 17{,}01$	415,860	— 63,483	17,032	— 4,650	1,550	275,2
$x = 22{,}41$	487,372	— 83,636	22,439	— 6,124	2,041	317,1
** $x = 30{,}04$	538,715	— 112,123	30,082	— 8,204	2,735	339,0
* $x = 32{,}97$	543,440	— 123,085	33,013	— 9,003	3,001	335,4
$x = 43{,}02$	492,278	— 160,554	43,075	— 11,751	3,917	275,7
$x = 47{,}52$	436,174	— 177,349	47,581	— 12,979	4,326	224,2
$x = 50{,}22$	393,870	— 187,426	50,285	— 13,716	4,572	186,0
$x = 52{,}77$	346,593	— 196,942	52,838	— 14,412	4,804	144,9
$x = 57{,}42$	243,633	— 214,297	57,494	— 15,682	5,227	57,5
$x = 61{,}99$	121,376	— 231,352	62,070	— 16,929	5,643	— 44,
$x = 67{,}48$	— 53,107	— 251,842	67,567	— 18,428	6,143	— 187,
$x = 68{,}38$	— 84,586	— 255,200	68,468	— 18,674	6,225	— 213,
$x = 70{,}11$	— 147,371	— 261,657	70,201	— 19,146	6,382	— 263,
$x = 71{,}61$	— 204,232	— 267,255	71,703	— 19,556	6,519	— 309,
$x = 72{,}88$	— 254,133	— 271,995	72,974	— 19,902	6,634	— 350
$x = 74{,}68$	— 327,631	— 278,713	74,777	— 20,394	6,798	— 409
$x = 76{,}10$	— 387,927	— 284,018	76,200	— 20,781	6,927	— 457

enti — 1ª Travata

Somma dei momenti inflettenti		Momenti inflettenti della curva inviluppe utile	Lastre orizzontali delle Tavole longitudinali		Momenti d'inerzia dei 4 ferri d'angolo $\frac{100 \times 100}{15}$ delle due lastre verticali 600 × 12 e delle lastre orizzontali	Sforzo longitudinale sopportato dal ferro per m.m.q. in chilogrammi $R = \frac{h\ M}{2\ I}$
positivi	negativi		numero	spessore in m.		
0	0	0	2	0,025	1,579.043.015.0	0
471,507	39,336	471,507	3	0,036	1,956.356.839.8	6,616
506,073	42,941	506,073	4	0,047	2,335.869.369.4	5,748
688,474	65,049	688,474	5	0,058	2,717.587.604.6	6,569
709,647	68,133	709,647	6	0,070	3,136.529.915.0	5,837
828,971	89,760	828,971	7	0,082	3,557.112.609.4	5,902
910,533	120,327	910,533	»	»	»	5,757
914,949	132,088	914,949	»	»	»	5,785
815,015	172,305	815,015	6	0,070	3,136.529.915.0	5,826
712,351	190,328	712,351	5	0,060	2,787.228.315.0	5,715
634,806	201,142	634,806	4	0,048	2,370.479.988.6	6,081
549,225	211,354	549,225	3	0,038	2,025.195.412.5	6,030
363,934	229,979	363,934	2	0,025	1,579.043.015.0	5,107
189,089	292,631	292,631	3	0,037	1,990.767.037.4	4,106
73,710	510,802	510,802	4	0,049	2,405.108.634.3	5,703
74,693	571,500	571,500	5	0,063	2,890.301.352.6	5,298
76,583	692,140	692,140	6	0,075	3,311.868.015.0	5,359
78,222	801,022	801,022	7	0,086	3,609.227.959.8	5,430
79,608	896,272	896,272	8	0,099	4,169.890.754.2	5,455
81,575	1036,132	1036,132	9	0,111	4,587.888.619.8	5,614
83,127	1150,704	1150,704	»	»	»	5,684

Momenti infle

Distanze dall'asse della prima pila all'asse della seconda pila	Valori dei momenti inflettenti					
	1ª ipotesi	2ª ipotesi	3ª ipotesi	4ª ipotesi	5ª ipotesi	Carico permanente
$x = 0{,}00$	—387,927	—284,018	76,200	—20,781	6,927	—457,97
$x = 3{,}44$	—365,695	—160,298	58,978	—16,082	5,361	—358,91
$x = 5{,}00$	—355,612	—108,093	51,168	—13,952	4,651	—316,91
$x = 6{,}66$	—344,884	— 55,213	42,857	—11,686	3,899	—274,23
$x = 8{,}30$	—334,285	— 5,778	34,647	— 9,447	3,149	—234,10
$x = 10{,}10$	—322,651	45,550	25,635	— 6,989	2,330	—192,38
$x = 11{,}00$	—316,834	70,017	21,129	— 5,760	1,920	—172,43
$x = 18{,}20$	—270,301	236,228	— 14,918	4,071	— 1,357	— 34,75
$x = 22{,}78$	—240,700	314,977	— 37,848	10,051	— 3,350	32,56
$x = 29{,}07$	—200,048	388,952	— 69,338	18,915	— 6,305	97,33
* $x = 37{,}68$	—144,400	426,061	—112,446	30,668	—10,223	142,58
** $x = 40{,}05$	—129,083	423,265	—124,313	33,904	—11,301	144,601
$x = 46{,}98$	— 84,296	382,863	—159,005	43,367	—14,456	126,66
$x = 54{,}17$	— 37,827	290,184	—195,002	53,185	—17,728	69,841
$x = 66{,}68$	43,025	5,706	—257,633	70,265	—23,422	—121,57
$x = 69{,}00$	58,020	— 64,253	—269,248	73,433	—24,478	—168,99
$x = 70{,}20$	65,775	—102,551	—275,256	75,072	—25,024	—196,631
$x = 72{,}00$	77,409	—162,708	—284,268	77,529	—25,843	—238,60
$x = 74{,}63$	94,406	—256,405	—297,435	81,120	—27,040	—304,31
$x = 76{,}10$	103,909	—311,727	—304,800	83,127	—27,709	—343,48

…enti – 2ª Travata

Somme dei momenti inflettenti		Momenti inflettenti della curva inviluppo utile	Lastre orizzontali delle Tavole longitudinali		Momenti d'inerzia dei 4 ferri d'angolo $\frac{100 \times 100}{15}$ delle due lastre verticali 600 × 12 e delle lastre orizzontali	Sforzo longitudinale sopportato dal ferro per m.m. q. in chilogrammi $R = \frac{h\,M}{2\,I}$
positivi	negativi		numero	spessore in m.		
83,127	1150,704	1150,784	9	0,111	4,587.888.619.8	5,684
64,339	900,988	900,988	8	0,099	4,169.890.754.2	4,881
55,819	794,575	794,575	7	0,087	3,734.553.303.4	4,792
46,756	686,021	686,021	6	0,073	3,241.667.728.6	4,749
37,796	583,616	583,616	5	0,062	2,856.942.177.4	4,571
73,515	522,023	522,023	4	0,051	2,474.420.635.8	4.707
93,066	495,029	495,029	3	0,035	1,921.964.815.0	5,722
240,299	321,329	321,329	2	0,025	1,579.043.015.0	4,426
357,591	281,898	357,591	3	0,038	2,025.195.412.5	5,018
405,199	275,691	405,199	4	0,054	2,578.525.486.2	4,498
599,311	267,069	599,311	»	»	»	5,189
601,770	264,697	601,770	»	»	»	5,211
552,896	257,757	552,896	3	0,037	1,990.767.037.4	6,173
413,210	250,557	413,210	2	0,025	1,579.043.015.0	5,798
118,096	402,633	402,633	3	0,038	2,025.195.412.5	5,650
131,453	526,978	526,978	4	0,052	2,509.104.001.4	5,785
140,847	599,462	599,462	5	0,064	2,926.729.230.2	5,332
154,938	711,427	711,427	6	0,074	3,276.763.694.2	5,442
175,526	885,197	885,197	7	0,089	3,805.258.490.2	6,064
187,036	987,720	987,720	»	»	»	5,849

Momenti inflet

Distanze dall'asse della seconda pila alla metà della terza travata	Valori dei momenti inflettenti					
	1ª ipotesi	2ª ipotesi	3ª ipotesi	4ª ipotesi	5ª ipotesi	Carico permanente
$x = 0{,}00$	103,909	−311,727	−304,800	82,128	−27,709	−343,484
$x = 3{,}90$	98,164	−291,492	−164,010	62,889	−20,960	−237,711
$x = 4{,}65$	95,867	−287,601	−138,679	58,998	−19,663	−218,681
$x = 6{,}97$	91,855	−275,563	− 63,882	46,960	−15,651	−162,486
$x = 10{,}35$	86,009	−258,025	35,456	29,423	− 9,805	− 87,844
$x = 11{,}13$	84,660	−253,978	56,758	25,376	− 8,456	− 71,850
$x = 22{,}08$	65,722	−197,163	291,581	− 31,439	10,482	104,580
$x = 23{,}28$	63,647	−190,237	310,025	− 37,666	12,557	118,439
$x = 29{,}13$	53,529	−160,584	379,318	− 68,119	22,677	170,509
$x = 38{,}05$	38,100	−114,300	419,101	−114,300	38,100	200,363

Le ordinate x corrispondono alle sezioni, in cui varia il numero delle lastre del sovraccarico e quelle segnate con due al vertici delle parabole del

tenti — 3ª Travata

Somma dei momenti inflettenti		Momenti inflettenti della curva inviluppo utile	Lastre orizzontali delle Tavole longitudinali		Momenti d'inerzia dei 4 ferri d'angolo $\frac{100 \times 100}{15}$ delle due lastre verticali 600×12 e delle lastre orizzontali	Sforzo longitudinale sopportato dal ferro per m.m q in chilogrammi $R = \frac{h\ M}{2\ T}$
positivi	negativi		numero	spessore in m.		
187,036	987,720	987,720	7	0,089	3,805.258.490.2	5,849
160,953	714,173	714,173	6	0,073	3,241.677.728.6	4,882
154,835	664,624	664,624	5	0,064	2,926.729.230.2	5,084
138,815	517,582	517,582	4	0,050	2,439.755.515.0	4,732
150,788	355,674	355,674	3	0,039	2,059.641.970.2	3,889
166,794	334,284	334,284	2	0,025	1,569.043.015.0	4,691
472,365	228,602	472,365	3	0,039	2,059.641.970.2	6,629
534,668	227,903	534,668	4	0,049	2,405.108.634.3	5,773
636,031	228,703	636,031	5	0,064	2,856.942.177.4	6,313
695,664	228,600	695,664	»	»	»	5,449

rizzontali, e quelle segnate con un asterisco ai vertici delle parabole
arico permanente.

§ 108. Tracciamento della linea degli sforzi di scorrimento trasversale, e determinazione degli spessori della parete piena per una trave appoggiata alle due estremità.

La parete di una trave principale di un ponte in ferro, organo, che opera la trasmissione delle tensioni e delle pressioni da una tavola all'altra della trave, deve avere tali spessori nei varii tratti da resistere alla forza, che tende a produrre la rottura per iscorrimento trasversale. Questa è data dalla somma algebrica delle forze verticali, che agiscono nella trave per es. alla destra della sezione, che si considera. Ora per la ricerca del massimo valore di M non era necessario supporre il peso ripartito sopra una parte della trave, perchè il massimo M corrisponde al sovraccarico distribuito sopra tutta la lunghezza, ma ciò non ha luogo come vedremo per gli sforzi F di scorrimento trasversale, quindi in questo caso dovremo studiare il carico in completamente ripartito.

Sia la trave AB (*Fig.* 126) di lunghezza l, esprimiamo con A e B le reazioni degli appoggi, con p il carico permanente per unità lineare, con p' il sovraccarico, poniamo $q = p + p'$.

Supposto il carico completo sopra tutta la trave, lo sforzo verticale, che agisce in una sezione qualunque, ha il valore:

$$F = A - qx = \frac{1}{2} ql - qx;$$

dalla quale si vede, che $F = 0$ nella sezione di mezzo, mentre se supponiamo il carico incompleto, nella sezione di mezzo il valore di F non è nullo, quindi il massimo sforzo, che tende a produrre lo scorrimento trasversale in ogni sezione, si ottiene considerando il sovraccarico incompletamente distribuito. Nella trave di lunghezza l, sia la parte l' caricata dal sovraccarico e dal peso permanente, e la parte $l'' = l - l'$ soltanto dal carico permanente.

Per il teorema dei momenti statici, le reazioni degli appoggi sono date dalle seguenti equazioni:

$$A = \frac{1}{l}\left(ql'l'' + \frac{ql'^2}{2} + \frac{pl''^2}{2}\right) \qquad (1),$$

$$B = \frac{1}{l}\left(pl'l'' + \frac{ql'^2}{2} + \frac{pl''^2}{2}\right) \qquad (2),$$

gli sforzi di scorrimento trasversale saranno dati da

$F = A - qx$ per le sezioni poste tra $x = 0$ ed $x = l'$:

$F = B - p(x - l)$ » » $x = l'$ ed $x = l$.

Queste due equazioni rappresentano due rette d'inclinazione diversa, che si tagliano nel punto avente l'ascissa $x = l'$ e l'ordinata corrispondente

$$y = \frac{ql'l''}{l} + \frac{ql'^2}{2l} + \frac{pl''^2}{2l} - ql' \qquad \text{(I)}.$$

Gli sforzi di scorrimento trasversale saranno dunque proporzionali alle ordinate di due rette, che fanno tra di loro un angolo, il cui vertice al moversi del sovraccarico da A verso B descrive una curva, la cui equazione si ottiene ponendo in (I) $l' = x$, $l - x = l''$. Si ottiene così l'equazione di una parabola, le ordinate della quale rappresentano in ciascun punto il massimo valore, che possa ricevere in questo punto lo sforzo di scorrimento trasversale per una distribuzione incompleta del sovraccarico a partire da una spalla.

L'equazione di questa linea, fatte tutte le riduzioni, è:

$$2ly = (p - q)\,x^2 - 2plx + pl^2 \qquad \text{(II)}.$$

Questa parabola incontra le verticali, che passano per gli appoggi; si ha: $y = \frac{1}{2}pl$ per $x = 0$, il quale valore corrisponde ad un sovraccarico nullo, ed $y = -\frac{1}{2}ql$ per $x = l$ che corrisponde al sovraccarico uniformemente distribuito sopra tutta la trave.

Questa parabola poi sega l'asse AB in un punto, che dista da A della quantità:

$$a = -\frac{pl}{p'} \pm l \sqrt{\left\{ \left(\frac{l}{p'}\right)^2 + \frac{p}{p'} \right\}},$$

equazione, che si ottiene ponendo $y = 0$ nella (II).

Quando il carico scorre da B verso A, la linea degli sforzi massimi di scorrimento trasversale avrà l'equazione:

$$2ly = (p - q)\ (l - x^2) - 2pl\ (l - x) + pl^2. \qquad \text{(III)}.$$

Quando il sovraccarico è distribuito sovra una metà della trave, allora per $x=\frac{l}{2}$ si ha: $y=-(q-p)\frac{l}{8}=-p'\frac{l}{8}$, il quale è indipendente dal carico permanente p.

Per linea degli sforzi di scorrimento trasversale dunque si potrà tenere la spezzata $vu\omega$ formata dalle rette vu, $u\omega$, che segano le verticali passanti per A e B in punti aventi l'ordinata eguale $\frac{1}{2}ql$, e la verticale condotta per C nel punto u, la cui ordinata eguaglia $\frac{1}{8}p'l$.

Il tracciato della linea ωuv degli sforzi di scorrimento trasversale permette di calcolare gli spessori delle lamiere nei varii tratti della lunghezza della trave.

Si avviluppi la $vu\omega$ colla linea poligonale $mnprqtsghk$ avente gli angoli retti, ed i vertici poco distanti da $vu\omega$ in modo da risultare approssimativamente eguali i tratti orizzontali e quelli verticali.

Le ordinate Am, pp' e qq' dànno i valori degli sforzi, che sopportano mn ed hk, pr ed sg, ed il tratto di mezzo qt.

L'equazione generale di stabilità per una trave, nella quale viene cimentata la resistenza allo scorrimento trasversale, è $\Omega=\frac{N}{K_3}$ esprimendo con Ω l'area della sezione, con N il valore dello sforzo, che tende a produrre tale scorrimento e con K_3 il coefficiente di resistenza alla rottura per scorrimento.

Ponendo per N successivamente i valori corrispondenti alle ordinate Am, pp', qq', si troveranno le aree Ω_1, Ω_2, Ω_3, delle sezioni delle lamiere nei tratti mn ed hk, pr ed fg, qt.

La lamiera avendo un'altezza h costante, chiamando:

σ_1 lo spessore nei tratti mn ed hk,
σ_2 lo spessore nei tratti pr ed sg,
σ_3 lo spessore nel tratto qt, si otterrà:

$$\sigma_1=\frac{\Omega_1}{h}\,,\quad \sigma_2=\frac{\Omega_2}{h}\,,\quad \sigma_3=\frac{\Omega_3}{h}\,.$$

Il valore di K_3 si prende dai pratici da 4 a 5 chilogrammi per m.m.q.

§ 109. Tracciamento delle linee degli sforzi di scorrimento trasversale, e determinazione degli spessori delle lamiere componenti la parete piena di una trave principale di un ponte in ferro appoggiata a più di due punti.

Sia una trave appoggiata agli n punti A, B, C . . . (*Fig.* 124) posti sopra la stessa orizzontale, e caricata di un carico p permanente per ogni unità lineare della sua lunghezza, e di un sovraccarico p' per ogni unità lineare, il quale supporremo successivamente distribuito completamente sopra ciascuna campata.

Adottando il principio stabilito nel § 106, lo sforzo massimo di scorrimento trasversale in ogni sezione sarà dato dalla somma degli sforzi, che si ottengono per le $n+1$ ipotesi accennate nel § 106; quindi la linea inviluppo utile degli sforzi di scorrimento trasversale si ottiene col seguente processo:

1° Supposta la prima travata carica, dai valori dei momenti inflettenti relativi alle sezioni degli appoggi si avranno quelli delle reazioni A_1, B_1, C_1 . . . degli appoggi, quindi:

Per la prima travata si avranno gli sforzi $F_1' = p'x - A_1$, i quali sono proporzionali alle ordinate di una retta, che taglia le verticali passanti per gli appoggi A e B alle distanze $-A_1$ e $p'l_1 - A_1$ dall'orizzontale AB; per la seconda $F_2' = p'l_1 - A_1 - B_1$, ossia gli sforzi F_2' sono costanti per tutte le sezioni della seconda travata e sono proporzionali alle ordinate di una retta parallela a BC, e distante da questa della quantità $p'l_1 - A_1 - B_1$.

Per la terza campata gli sforzi $F_3' = p'l_1 - A_1 - B_1 - C_1$ i quali essendo costanti per tutte le sezioni, possono esser rappresentati dalle ordinate di una retta condotta parallelamente a CD alla distanza espressa con F_3' e così di seguito per tutte le altre campate, si vede che le linee degli sforzi di scorrimento trasversale sono rette parallele alla orizzontale, che passa per gli appoggi.

2° Supposta carica la seconda travata dai valori dei momenti inflettenti relativi alle sezioni di appoggio, si potranno avere le reazioni A_2, B_2, C_2, D_2 . . . ; quindi si avranno gli sforzi di scorrimento trasversale per la 1ª campata $= F_1'' = -A_2$, ossia rappresentate dalle ordinate di una retta parallela ad AB, posta alla distanza $-A_2$ da questa.

Per la seconda saranno $= F_2'' = p'x - A_2 - B_2$, equazione della retta, che taglia la BC e sega le verticali passanti per B e C in punti posti alle distanze $-A_2 - B_2$, e $p'l_2 - A_2 - B_2$ dalla orizzontale ABC . . .

Per la terza si ha $F_3''' = p'l_2 - A_2 - B_2 - C_2$ che è costante e così di seguito: quindi in ciascuna campata carica la linea degli sforzi di scorrimento trasversale è una retta, che sega l'asse della trave, e per le altre tale linea è una parallela al piano degli appoggi.

3° Supposto il carico permanente distribuito sopra tutta la lunghezza della trave, dai valori dei momenti inflettenti relativi

alle sezioni degli appoggi si possono avere le loro reazioni, da queste facilmente si deducono le equazioni delle rette degli sforzi di scorrimento trasversale.

4° Il tracciato per ciascuna ipotesi delle rette degli sforzi di scorrimento trasversale, serve a descriverne l'inviluppo positivo, l'inviluppo negativo, e l'inviluppo utile.

Il tracciato dell'inviluppo utile permette, seguendo il metodo indicato nel § precedente, di trovare gli spessori dei varii tratti di lamiere componenti la parete piena di una trave di un ponte in ferro appoggiato a più punti.

§ 110. Cenni generali sopra le pareti a traliccio. — La parete di una trave con sezione a doppio T dicesi a traliccio, quando le tavole sono legate da travi semplici in ferro a semplice ed a doppio T, o da ferri d'angolo, oppure da spranghe o listelli rettangolari. Queste possono prendere le disposizioni indicate dalle figure 127, 128, 129, 130 e 131.

Nella prima le travi semplici componenti il traliccio formano triangoli isosceli, allora dicesi sistema triangolare simmetrico; nella seconda le travi sono disposte secondo triangoli rettangoli, ed il sistema prende nome di triangolare non simmetrico; i sistemi poi disegnati nelle figure 129 e 130 prendono nome di doppio sistema simmetrico, e di doppio sistema non simmetrico; nella figura 131 finalmente è disegnato il traliccio reticolato, il quale si compone di due serie di travi semplici parallele, incrociantisi in modo da formare una rete a strette maglie.

§ 111. Traliccio triangolare simmetrico. — Sia una parte AXY di trave (*Fig.* 132), appoggiata a due o più punti e caricata di un peso uniformemente distribuito sopra la sua lunghezza, oppure di pesi applicati nei punti $m-1$, m, $m+1$, $m+2$ . . . La parete di questa trave è composta delle saette $(m-3)$ $(m-2)$, $(m-2)$ $(m-1)$, $(m-1)$ m ecc., le quali sono disposte in modo da formare tanti triangoli. Supponiamo di conoscere per la detta trave e la linea dei momenti inflettenti e la spezzata degli sforzi di scorrimento trasversale relativi alle sezioni della trave. Poniamo:

M_{m-1}, M_m, M_{m+1}, . . . i momenti inflettenti relativi alle sezioni fatte nei punti $m-1$, m, $m+1$ . . .

F_{m-1}, F_m, F_{m+1} . . . gli sforzi di scorrimento trasversale nelle sezioni poste immediatamente alla sinistra dei punti $m-2$, m, $m+1$ . . .

O_m, O_{m+2}, O_{m+4} . . . le forze, che cimentano le sezioni fatte nella tavola superiore immediatamente alla sinistra dei punti m, $m+2$ . . .

U_{m-1}, U_{m+1} . . . le forze, che sollecitano le sezioni fatte nella tavola inferiore immediatamente alla sinistra dei punti $m-1$, $m+1$, ecc. . . .

β_m, β_{m+2} . . . gli angoli dei successivi tratti della tavola superiore coll'orizzontale.

γ_{m-1}, γ_{m+1} . . . gli angoli dei successivi tratti della tavola inferiore coll'orizzontale.

N_m, N_{m+1} . . . le forze, che sollecitano le saette poste immediatamente alla sinistra dei punti m, $m+1$ . . .

φ_m, φ_{m+1} . . . gli angoli delle successive saette coll'orizzontale.

H_m, H_{m+1} . . . le distanze delle tavole nelle sezioni passanti per i punti m, $m+1$ . . .

Consideriamo la saetta m, $m-1$, che deve sopportare lo sforzo N_m ed immaginiamo le tavole segate da due piani verticali posti uno alla destra del punto $m-1$, l'altro alla sinistra di m, dovendo il momento delle forze intrinseche eguagliare quello delle estrinseche, si avrà per la sezione alla sinistra di m:

$$U_{m+1} \cos.\gamma = \frac{M_m}{H_m} \qquad (1),$$

e per la sezione alla destra di $m-1$:

$$O_m \cos.\beta = \frac{M_{m-1}}{H_{m-1}} \qquad (2).$$

Dovendo il sistema delle forze O_m, U_{m+1} ed N_m essere in equilibrio, la somma delle loro componenti orizzontali deve eguagliare zero, quindi:

$$N_m \cos.\varphi - U_{m+1} \cos.\gamma + O_m \cos.\beta = 0,$$

da cui:

$$N_m \cos.\varphi = \frac{M_m}{H_m} - \frac{M_{m-1}}{H_{m-1}} \qquad (I).$$

Le eguaglianze stabilite servirebbero per trovare i valori degli sforzi, che cimentano e le sezioni delle travate e quelle delle saette.

Ora la somma delle componenti verticali delle forze intrinseche, che sollecitano una sezione, deve eguagliare lo sforzo di

scorrimento trasversale relativo alla detta sezione, quindi dovrà aversi l'equazione:

$$F_m = U_{m+1}\,\text{sen}.\gamma + O_m\,\text{sen}.\beta \pm N_m\,\text{sen}.\varphi \qquad (3),$$

nella quale sostituendo per U_{m+1}, O_m i valori dati dalle precedenti equazioni, si ottiene:

$$\pm N_m \text{sen}.\varphi = F_m - \frac{M_m}{H_m}\,\text{tang}.\gamma_{m+1} - \frac{M_{m-1}}{H_{m-1}}\,\text{tang}.\beta_m \qquad \text{(II)},$$

la quale si puo porre sotto la forma più semplice

$$\pm N_m \text{sen}.\varphi = F_m - \frac{M_{m-\frac{1}{2}}}{H_{m-\frac{1}{2}}}\,(\text{tang}.\beta + \text{tang}.\gamma) \qquad \text{(II)}_a,$$

dove $M_{m-\frac{1}{2}}$ ed $H_{m-\frac{1}{2}}$ corrispondono alle sezioni poste nel mezzo del tratto $(m-1)\,m$.

Dalla (I) si potranno dunque ottenere le seguenti equazioni determinatrici degli sforzi, che devono sopportare le diverse saette:

$$\left.\begin{array}{l}
N_{m+2}\cos.\varphi = \dfrac{M_{m+2}}{H_{m+2}} - \dfrac{M_{m+1}}{H_{m+1}} \\
\qquad\qquad N_{m+1}\cos.\varphi = \dfrac{M_m}{H_m} - \dfrac{M_{m+1}}{H_{m+1}} \\
N_m\cos.\varphi = \dfrac{M_m}{H_m} - \dfrac{M_{m-1}}{H_{m-1}} \\
\qquad\qquad N_{m-1}\cos.\varphi = \dfrac{M_{m-2}}{H_{m-2}} - \dfrac{M_{m-1}}{H_{m-1}} \\
N_{m-2}\cos.\varphi = \dfrac{M_{m-2}}{H_{m-2}} - \dfrac{M_{m-3}}{H_{m-3}} \\
\qquad\qquad N_{m-3}\cos.\varphi = \dfrac{M_{m-4}}{H_{m-4}} - \dfrac{M_{m-3}}{H_{m-3}}
\end{array}\right\} \text{(III)}.$$

Supponiamo che la trave considerata appoggi soltanto alle due estremità, allora i rapporti $\frac{M_{m-4}}{H_{m-4}}, \frac{M_{m-3}}{H_{m-3}}, \frac{M_{m-2}}{H_{m-2}}, \frac{M_{m-1}}{H_{m-1}} \ldots$

andranno successivamente crescendo da una estremità ad una sezione intermedia, quindi se gli sforzi N_{m+2}, N_m, N_{m-2}, N_{m-4} . . . sono positivi, gli altri N_{m+1}, N_{m-1}, N_{m-3} . . . saranno negativi, ossia se le travi semplici $(m-5)$ $(m-4)$, $(m-3)$ $(m-2)$, $(m-1)$ m . . . sono compresse, le $(m-4)$ $(m-3)$, $(m-2)$ $(m-1)$ . . . saranno estese.

Ora consideriamo la sezione, alla quale corrisponde il massimo valore di $\frac{M}{H}$; sia questa la m, allora $\frac{M_m}{H_m}$ sarà maggiore di $\frac{M_{m-2}}{H_{m-2}}$, $\frac{M_{m-1}}{H_{m-1}}$, $\frac{M_{m+1}}{H_{m+1}}$ . . . ed i valori di $\frac{M}{H}$ andranno crescendo da una estremità fino alla sezione m, e diminuendo dalla m all'altro estremo, quindi se i valori di N_{m-4}, N_{m-2}, N_m sono positivi, quelli di N_{m+2}, N_{m+4} . . . saranno negativi; si potrà dunque conchiudere che nella sezione corrispondente al massimo di $\frac{M}{H}$ vi è nelle travi del traliccio aventi la stessa direzione un cambiamento di pressione in estensione e viceversa; con analoghe considerazioni si può dimostrare che tale cambiamento avrà pure luogo nella sezione corrispondente al minimo di $\frac{M}{H}$. Queste regole vengono estese al caso di una trave appoggiata a più punti.

Per il traliccio triangolare simmetrico multiplo, come quello rappresentato dalla figura 133, il calcolo viene condotto nel modo tenuto per ciascun sistema semplice. Sia n^{uplo} il sistema, allora per ciascuno degli n sistemi semplici si ottiene:

$$(M_x) = \frac{1}{n} M_x,$$

$$(F_x) = \frac{1}{n} F_x,$$

quindi gli sforzi sopportati da ciascuna saetta saranno dati dalle equazioni:

$$N_m \cos.\varphi = \frac{1}{n} \left(\frac{M_m}{H_m} - \frac{M_{m'}}{H_{m'}} \right),$$

$$N_m \operatorname{sen}.\varphi = \frac{1}{n} \left\{ F_{\frac{m+m'}{2}} - \frac{M_{\frac{m+m'}{2}}}{H_{\frac{m+m'}{2}}} (\operatorname{tang}.\beta + \operatorname{tang}.\gamma) \right\},$$

nella quale l'indice $\frac{m+m'}{2}$ corrisponde alla sezione di mezzo della saetta mm', che si considera.

Quando le due tavole sono orizzontali, gli angoli β e γ sono eguali a zero, e le equazioni precedenti daranno:

$$O_m \text{ oppure } U_m = \frac{M_{m-1}}{H},$$

l'unità di area della sezione Ω della tavola inferiore o superiore sarà sollecitata dalla forza $\frac{O_m}{\Omega}$, oppure da $\frac{U_m}{\Omega}$.

Il tirante m sarà teso o compresso dalla forza

$$N_m \text{ sen.}\varphi = F_m.$$

Da questa formola si vede, che lo sforzo sopportato da ogni tirante per una trave con tavole orizzontali non dipende che dallo sforzo di scorrimento trasversale, quindi il tracciato delle linee, le cui ordinate sono proporzionali agli sforzi F può servire di base, per determinare le dimensioni delle parti componenti il traliccio.

Esempio. Un bellissimo esempio di trave in ferro con tavole orizzontali, e con parete a traliccio semplice triangolare simmetrico, detto dagli inglesi sistema Warren, ci presenta il viadotto di Crumlin. La lunghezza della travata ossia $l = 45^m$, l'altezza $H = 4^m.20$; la base dei triangoli isosceli componenti il traliccio è di 5^m. Le aree delle sezioni in c.m.q. dei varii tratti delle tavole, e delle travi semplici componenti il traliccio sono poste nella figura 134. La somma del sovraccarico, e del carico permanente per metro lineare è $q = 2500$ chilogrammi.

L'espressione generale dei momenti inflettenti è:

$$M = \frac{ql^2}{8} - \frac{qx^2}{2},$$

esprimendo con x la distanza della sezione, che si considera dalla metà della trave.

I valori di F per le diverse sezioni vengono trovate applicando la formola (II) § 108 quando il sovraccarico si avanza da A verso B, e la (III) § 108 quando il sovraccarico cammina da B verso A.

Avendo così i valori del carico e del sovraccarico dei momenti inflettenti e degli sforzi di scorrimento trasversale relativi a tutte le sezioni della trave, conoscendo le dimensioni delle parti componenti la trave, si potranno dalle formole stabilite avere i valori degli sforzi, che devono sopportare le varie parti, e le resistenze, che devono presentare le unità di area delle loro sezioni.

Nella tabella seguente sono registrati tutti i risultati dei calcoli.

Si noti, che le travi del traliccio sono inclinate all'orizzontale di un angolo, la cui tangente trigonometrica eguaglia $\frac{4,2}{2,5}$, quindi $\varphi = 59°,20$ e $sen.\varphi = 0,86$.

$p = 800$ chilogrammi, $q = 2500$ chilogrammi, $l = 45^m,00$, $H = 4^m,20$

Indice $m =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
mass. $M_m = \frac{q l^2}{8} - \frac{q x^2}{2}$	m. t. 125	m. t. 125	m. t. 343,7	m. t. 437	m. t. 500	m. t. 562,5	m. t. 593,7	m. t. 625	m. t. 625	m. t. 525	m. t. 593,7	m. t. 562,5
$O_m = \frac{M_{m-1}}{H}$ in chilogr.		29762		81845		119048		141369		148801		141369
$U_m = \frac{M_{m-1}}{H}$			59524		104166		133929		148801		148801	
Ω_m in c.m.q.		148	97	180	155	193	206	244	219	244	219	244
$K_1 = \frac{O_m}{\Omega}$		201		455		616		579		610		579
$K_2 = \frac{U_m}{\Omega}$					672		650		680		680	

Per il carico in movimento da B verso A

$N_m = \frac{F_m}{\text{sen.}\varphi} = \frac{F_m}{0,86}$ in chil.	65116	63488	52442	50814	39767	38140	27693	25465	14430	12790	2907	1279
ω_m in c.m.q.	87	139	58	112	58	80	58	64	104	104	64	58
$K_s = \frac{N_m}{\omega}$	748		904		685		477		138		35	
$K_i = \frac{N_m}{\omega}$		456		450		477		398		123		22
Per il carico in movimento da A verso B												
F_m in tonnellate	33,4	30,6	25,2	22,4	11,8	8,0	— 2,2	— 5,0	— 22,0	— 24,0	— 43,8	— 46,6
$N_m = \frac{F_m}{0,86}$ in chilogr.	19400	17790	14650	13023	6860	4651	—1279	—2907	—12790	—14430	—25465	—27693
ω_m = in c.m.q.	87	139	58	112	58	80	58	64	104	104	64	58
$K_s = \frac{N_m}{\Omega}$	223		252		118			45		138		477
$K_i = \frac{N_m}{\Omega}$		128		116		58	22		123		398	

§ 112. **Traliccio triangolare non simmetrico.** — Dicesi quello, nel quale una delle travi del traliccio concorrenti nello stesso punto della tavola, è inclinata all'orizzontale, l'altra è verticale (*Fig.* 135 e 135_a).

Adottiamo le denominazioni stabilite nel precedente paragrafo ed esprimiamo con V_m, V_{m+1} . . . le forze, che cimentano i tiranti verticali.

Consideriamo due sezioni poste immediatamente una alla destra, l'altra alla sinistra di m, il momento della coppia delle forze intrinseche eguaglia quello delle estrinseche, quindi per la figura 135

$$O_{m+1} \cos.\beta = U_m \cos.\gamma = \frac{M_m}{H_m} \qquad \text{(I)},$$

per la figura 135_a:

$$O_m \cos.\beta = U_{m+1} \cos.\gamma = \frac{M_m}{H_m} \qquad \text{(II)}.$$

La somma delle componenti orizzontali delle forze, che sollecitano una sezione verticale, la quale seghi la saetta $m\,(m-1)$, per l'equilibrio deve eguagliare zero, quindi per la figura 135

$$N_m \cos.\varphi = U_m \cos.\gamma - O_m \cos.\beta \qquad (1),$$

per la figura 135_a:

$$N_m \cos.\varphi = O_m \cos.\beta - U_m \cos.\gamma \qquad (2).$$

dalle quali:

$$N_m \cos.\varphi = \frac{M_m}{H_m} - \frac{M_{m-1}}{H_{m-1}} \qquad \text{(III)},$$

la quale serve per calcolare gli sforzi, che devono sopportare le saette inclinate del traliccio.

Se pratichiamo una sezione verticale nella trave alla sinistra del punto m, si ha:

$$F_m = O_m \operatorname{sen}.\beta - U_m \operatorname{sen}.\gamma \pm N_m \operatorname{sen}.\ ,$$

quindi per la figura 135

$$N_m \operatorname{sen}.\varphi = -F_m - \frac{M_m}{H_m} \operatorname{tang}.\gamma - \frac{M_{m-1}}{H_{m-1}} \operatorname{tang}.\beta \qquad \text{(IV)},$$

e per la figura 135_a

$$N_m \operatorname{sen}.\varphi = F_m + \frac{M_m}{H_m} \operatorname{tang}.\beta + \frac{M_{m-1}}{H_{m-1}} \operatorname{tang}.\gamma \qquad (V).$$

In molti casi della pratica basta porre per $\frac{M}{H}$ il valore intermedio tra quello corrispondente alla sezione m, e quello corrispondente alla $m-1$; quindi:

$$N_m \operatorname{sen}.\varphi = - F_m - \frac{M_{m-\frac{1}{2}}}{H_{m-\frac{1}{2}}} (\operatorname{tang}.\beta + \operatorname{tang}.\gamma) \qquad (VI),$$

nella quale le quantità $M_{m-\frac{1}{2}}$ ed $H_{m-\frac{1}{2}}$ rappresentano il momento inflettente e l'altezza della sezione di mezzo del tratto $m(m-1)$.

Per determinare le intensità delle forze V che esercitano la loro azione sopra i tiranti verticali, supponiamo, che il carico da sopportarsi dalla trave sia applicato nei punti $m-1$, m, $m+1$ . . . della tavola superiore o della inferiore, ciascuno di questi punti deve trovarsi in equilibrio sotto l'azione di tutte le forze applicate in esso. Consideriamo il tirante mm ed immaginiamo tagliato da un piano parallelo alle saette (*Fig.* 136 e 136_a), ed inoltre esprimiamo: con

P_o' il carico applicato in ciascuno dei punti $m-1$, m ed $m+1$ della tavola superiore,

P_u' il carico applicato in ciascuno dei punti $m-1$, m ed $m+1$ della tavola inferiore.

Nella figura 136 la somma delle componenti verticali delle forze estrinseche agenti alla sinistra della sezione, che si considera, è data da $F_m + P_o'$, le componenti verticali delle forze applicate nelle sezioni delle tavole sono $O_{m+1} \operatorname{sen}.\beta$, $U_m \operatorname{sen}.\gamma$, quindi ponendo per O_{m+1} ed U_m i loro valori si ottiene:

$$F_m + P_o' = - \frac{M_m}{H_m} (\operatorname{tang}.\beta_{m+1} + \operatorname{tang}.\gamma_m) + V_m,$$

da cui:

$$V_m = \frac{M_m}{H_m} (\operatorname{tang}.\beta_{m+1} + \operatorname{tang}.\gamma_m) + F_m + P_o' \qquad (VII).$$

Per l'altra figura si ottiene:

$$V_m = -\frac{M_m}{H_m}(\text{tang.}\beta_m + \text{tang.}\gamma_{m+1}) - F_m - P_u' \qquad \text{(VIII)}.$$

Quando il traliccio triangolare non simmetrico è doppio, triplo o quadruplo, allora le equazioni, che dànno i valori degli sforzi, che sollecitano le saette inclinate, sono:

$$N_m \cos.\varphi = \frac{1}{n}\left(\frac{M_m}{H_m} - \frac{M_{m'}}{H_{m'}}\right) \qquad \text{(IX)},$$

$$N_m \text{ sen.}\varphi = \frac{1}{n}\left(F_{\frac{m+m'}{2}} - \frac{M_{\frac{1}{2}(m+m')}}{H_{\frac{m+m'}{2}}}(\text{tang.}\beta + \text{tang.}\gamma)\right) \qquad \text{(X)},$$

quando si consideri la saetta *mm'*.

Il valore di V per il tirante m per la figura 135 è dato da

$$V_m = \frac{M_m}{H_m}(\text{tang.}\beta_{m+1} + \text{tang.}\gamma_m) + \frac{1}{n}F_{\frac{m+m'}{2}} + P_o' \qquad \text{(XI)},$$

e per la figura 135_a si ottiene:

$$V_m = -\frac{1}{n}\frac{M_m}{H_m}(\text{tang.}\beta_m + \text{tang.}\gamma_{m+1}) - \frac{1}{n}F_{\frac{m+m'}{2}} - P_u' \qquad \text{(XII)}.$$

I valori di O e V, forze che sollecitano le sezioni delle tavole, quando siano note le N, possono venir calcolati nel seguente modo (*Fig.* 137).

Si immagini sezionata la trave con un piano verticale passante per la metà del tratto $m(m-1)$; sia $\Sigma_m(N \cos.\varphi)$ la somma delle componenti orizzontali delle forze, che cimentano la saetta; sia h la distanza della risultante di tali forze dal centro di gravità della tavola inferiore ed $H-h$ la distanza dal centro di gravità della tavola superiore, quindi si ottiene:

$$O_m \cos.\beta = \frac{M_{m-\frac{1}{2}}}{H_{m-\frac{1}{2}}} \pm \frac{h}{H_{m-\frac{1}{2}}}\Sigma_m(N \cos.\varphi).$$

ed

$$U_m \cos.\gamma = \frac{M_{m-\frac{1}{2}}}{H_{m-\frac{1}{2}}} \mp \frac{h}{H_{m-\frac{1}{2}}}\Sigma(N_m \cos.\varphi).$$

Per traliccio triangolare semplice non simmetrico con tavole orizzontali si ha per la figura 138

$$O_m = U_{m+1} = \frac{M_m}{H} \qquad \text{(XIII)},$$

$$N_m = \frac{1}{\text{sen.}\varphi} F_m \qquad \text{(XIV)},$$

$$V_m = - F_m - P_u{}' = F_{m+1} + P_o{}' \qquad \text{(XV)};$$

per la figura 139 si ha invece:

$$O_{m+1} = U_m = \frac{M_m}{H} \qquad \text{(XVI)},$$

$$N_m = \frac{1}{\text{sen.}\varphi} F_m \qquad \text{(XVII)},$$

$$V_m = F_m + P_o{}' = F_{m+1} - P_u{}' \qquad \text{(XVIII)}.$$

Da queste equazioni si vede come il tracciato delle linee, le cui ordinate sono proporzionali agli sforzi F di scorrimento trasversale, può servire di base alla determinazione degli sforzi che devono sopportare le varie parti, quindi le dimensioni delle loro sezioni trasversali.

Esempio. La figura 140 dà la forma di una delle travi principali di un ponte in ferro presso Monaco. L'altezza della trave ossia $H = 7{,}02$, la base di ciascun triangolo ossia la larghezza di ciascun scompartimento è $d = 6^m{,}275$, la lunghezza della campata divisa iu 8 scompartimenti è di $50^m{,}20$.

Nella stessa figura sono notate in c.m.q. le aree delle sezioni delle due travate, e delle parti componenti il traliccio nei diversi tratti della trave.

Il peso totale $q = 4310$ chilogr., il peso permanente $p = 2720$. Questi dati permettono di calcolare i massimi valori e dei momenti M, e degli sforzi F, e delle forze O, U, N e V, e delle resistenze K_1 e K_2 che devono sopportare le unità di area (c.m.q.) delle sezioni e delle tavole, e delle travi componenti il traliccio.

I risultati di questi calcoli vengono registrati nella tabella seguente.

$q = 4310$ chilogrammi, $p = 2720$ chilogrammi, $l = 50{,}2$, $H = 7{,}02$, $\text{sen.}\varphi = 0{,}745$

Indice $m =$	1	2	3	4	5	OSSERVAZIONI
mass. $M_m =$	594,7	1018,7	1273,0	1357,8	1273	L'angolo $\varphi = 48°,10$ perciò: sen.φ= sen. $48°,10 = 0{,}745$.
$O_m = \frac{M}{H} =$	84,86	145,52	181,86	193,98	181,86	
Ω in c.m.q.	228	314	375	397	375	
$K_2 = \frac{O_m}{\Omega}$ in chilogr.	375	463	484,9	488	484,9	
$U_m = \frac{M_{m-1}}{H}$ in tonell.		84,86	145,32	181,86	145,52	Il valore di $P_0{}^1$ ossia del peso applicato in ciascuno dei punti 1, 2, 3..... della tavola superiore, uguaglia 3 tonellate.
Ω in m.c.q.		144	245	303	245	
$K_1 = \frac{U}{\Omega}$ in chilogr.		589	594	600	594	
F_m in tonell.	96,8	74,0	51,2	28,5	8,0	
$N_m = \frac{F_m}{\text{sen.}\varphi}$ in tonell. $=$	130,0	99,36	68,64	38,2	10,74	
ω_m in c.m.q. $=$	215	160	111	66	29	
$K_1 = \frac{N_m}{\omega}$ in chilogr. $=$	605	620	616	579	370	Nel calcolare il valore del coefficiente K_1, di resistenza alla compressione, abbiamo trascurato l'incurvamento, che può accompagnare lo schiacciamento.
mass. V_m = mass. $F_{m+1} + P_0{}^1 =$	74,0 + 3 = 77 ton.	51,2 + 3,0 = 54,2 ton.	28,5 + 3,0 = 31,5 ton.	8,0 + 3,0 = + 11,0 ton.		
ω in c.m.q.	182	140	100	80		
$K_2 = \frac{V_m}{\omega}$ in chilogr. $=$	423	387	315	137		

§ 113. **Traliccio reticolato.** — È quello, nel quale le travi del traliccio formano una rete a strette maglie. Questo si può considerare come un sistema triangolare simmetrico multiplo, quindi le formule stabilite nei paragrafi precedenti potranno applicarsi a questo caso.

Consideriamo nella trave una sezione posta a distanza x da un estremo; si avrà:

$$O_x \cos.\beta = U_x \cos.\gamma = \frac{M_x}{H_x} \qquad (I),$$

$$N_x \operatorname{sen} \varphi = \frac{1}{n} \left\{ F_x - \frac{M_x}{H_x} (\operatorname{tang}.\beta + \operatorname{tang}.\gamma) \right\} \qquad (II).$$

Quando le tavole sono orizzontali, gli angoli β e γ sono nulli; sarà perciò:

$$O_x = U_x = \frac{M_x}{H_x} \qquad (III),$$

$$N_x = \frac{1}{n} \frac{F_x}{\operatorname{sen}.\varphi} \qquad (IV),$$

essendo n il numero dei listelli segati dal piano verticale condotto alla distanza x da un estremo.

Dalla (IV) si vede, che gli sforzi sopportati dalle parti componenti il traliccio si possono avere dal tracciato delle linee le cui ordinate sono proporzionali agli sforzi di scorrimento trasversale. La sezione trasversale di ciascuna trave del traliccio è proporzionale ad $\frac{1}{\operatorname{sen}.\varphi}$, la lunghezza è proporzionale ad $\frac{1}{\cos.\varphi}$, il suo volume sarà proporzionale ad $\frac{1}{\operatorname{sen}.\varphi \cos.\varphi}$, il cui minimo valore corrisponde a $\varphi = 45°$.

Ponendo $\varphi = 45°$ nella (IV) si ottiene:

$$N_x = \frac{1}{0{,}707n} F_x \qquad (IV)_a.$$

CAPITOLO IV.

SPINTA DELLE TERRE.

§ 114. **Nozioni generali.** — Se in un masso terroso non mai stato smosso od artificialmente compresso pratichiamo un taglio verticale, la cui profondità non superi un dato limite, tutte le parti restano in equilibrio; superato questo limite la massa MPN (*Fig.* 141) si stacca dal sottostante terrapieno per prendere la posizione PQN. La faccia di separazione del masso spingente dal totale è una superficie cilindrica avente generatrici orizzontali e per direttrice una linea AS (*Fig.* 142), la quale comincia in alto con una breve retta verticale, a cui si accorda una curva convessa verso l'interno del terrapieno, colla sua tangente nel punto più basso inclinata di un angolo poco diverso da quello, che corrisponde al naturale declivio delle terre. Noi, senza allontanarci molto dal vero, supponiamo che tale superficie di separazione sia il piano ST tangente alla superficie cilindrica in S.

In questo capitolo studieremo due problemi:

1° Determinare la relazione tra il più piccolo angolo, che la faccia esterna del terrapieno deve fare colla verticale e l'altezza del taglio, affinchè non abbia luogo alcuno staccamento delle parti, ossia affinchè il peso del masso spingente non vinca la forza di coesione.

2° Dato l'angolo della faccia esterna del terrapieno colla orizzontale o colla verticale ed il valore del sovraccarico, che sopporta, determinare l'intensità dello sforzo, che il masso spingente esercita contro il sostegno, che si oppone alla sua separazione dal masso totale.

§ 115. **Relazione tra il più piccolo angolo della faccia esterna del terrapieno colla verticale e l'altezza del taglio, affinchè il peso del masso spingente non vinca la forza di coesione.** — Sia il terrapieno MZ (*Fig.* 143) caricato nella sua faccia superiore orizzontale da un peso uniformemente distribuito, si trovi la relazione tra l'angolo MNR e l'altezza NR, affinchè non abbia luogo alcuno scoscendimento nel masso MZ. Siano:

h l'altezza del masso terroso,

φ l'angolo cercato NMR,

ψ l'angolo della faccia NT di separazione colla verticale,

p il peso distribuito sopra l'unità di lunghezza della superficie superiore,

g il peso dell'unità di volume del masso terroso,

γ la resistenza alla coesione per ogni unità di area.

Ora il peso del masso spingente, ossia del prisma triangolare NMT di terra avente per lunghezza l'unità, è dato dal prodotto dell'area di NMT per il peso g dell'unità di volume ossia da

$$\frac{1}{2} g h^2 (\text{tang.}\psi - \text{tang.}\varphi),$$

il peso del sovraccarico MTH'H è dato dal prodotto della lunghezza NT per p, ossia da

$$p h (\text{tang.}\psi - \text{tang.}\varphi),$$

quindi il peso totale:

$$P = h \left(\text{tang.}\psi - \text{tang.}\varphi\right) \left(\frac{1}{2} g h + p\right) \qquad (1).$$

La massa MNT tende a staccarsi scorrendo lungo il piano MT, siccome la coesione agisce nella direzione della detta faccia, per la stabilità dovrà la componente parallela alla faccia della forza sollecitante essere minore della forza di coesione. L'attrito non viene considerato, perchè esso entra in campo, quando già è vinta la coesione.

La componente di P diretta parallelamente alla faccia è $P \cos.\psi$; la forza di coesione è γ. $MT = \gamma \frac{h}{\cos.\psi}$, per la stabilità dovrà avere luogo:

$$P \cos.\psi < \gamma \frac{h}{\cos.\psi},$$

da cui:

$$P < \gamma \frac{h}{\cos.^2\psi}$$

$$P < \gamma h (1 + \text{tang.}^2\psi) \qquad (I).$$

Posto per P il suo valore, risulta:

$$\frac{1}{2} h (g h + 2p) (\text{tang.}\psi - \text{tang.}\varphi) < \gamma h (1 + \text{tang.}^2\psi),$$

$$\text{tang.}\psi - \text{tang.}\varphi < \frac{2\gamma}{gh+2p}(1+\text{tang.}^2\psi) \qquad \text{(II)},$$

da cui:

$$\text{tang.}\varphi > \text{tang.}\psi - \frac{2\gamma}{gh+2p}(1+\text{tang.}^2\psi) \qquad \text{(III)},$$

quindi per la stabilità il più piccolo valore di φ o di tang.φ deve corrispondere al massimo del secondo membro. Pongasi:

$$\text{tang.}\psi - \frac{2\gamma}{gh+2p}(1+\text{tang.}^2\psi) = \mu.$$

Risulta l'equazione

$$\text{tang.}\psi = \frac{gh+2p}{4\gamma} \pm \sqrt{\left\{\frac{(gh+2p)^2}{16\gamma^2} - \frac{gh+2p}{2\gamma}\mu - 1\right\}}.$$

Il massimo valore di μ si ottiene da

$$\frac{(gh+2p)^2}{16\gamma^2} - \frac{gh+2p}{2\gamma}\mu - 1 = 0,$$

da cui:

$$\mu = \frac{(gh+2p)^2 - 16\gamma^2}{8\gamma(gh+2p)},$$

quindi il più piccolo valore da darsi a φ è quello, che si ottiene da

$$\text{tang.}\varphi = \frac{(gh+2p)^2 - 16\gamma^2}{8\gamma(gh+2p)} \qquad \text{(IV)}.$$

L'altezza h del taglio da praticarsi verticalmente nel masso terroso senza pericolo di scoscendimento si ottiene da

$$(gh+2p)^2 - 16\gamma^2 = 0,$$

da cui:

$$h = \frac{4\gamma - 2p}{g} \qquad \text{(V)}.$$

Se non vi ha alcun sovraccarico, allora $p = 0$ ed

$$h = \frac{4\tau}{g} \qquad \text{(VI)},$$

ossia la profondità del taglio verticale senza pericolo di frana, quando non vi abbia sovraccarico, eguaglia il rapporto tra il quadruplo del coefficiente di resistenza ed il peso dell'unità di volume.

§ 116. Procedimento grafico per determinare la massima spinta prodotta da un masso terroso, che sta per staccarsi dal sottostante terrapieno, contro la parete piana di un muro di sostegno. — Il terrapieno BH (*Fig.* 144) appoggia nella sua faccia anteriore contro la parete piana BA di un muro di sostegno. Pongasi:

φ l'angolo dell'inclinazione naturale delle terre,

β l'angolo, che la faccia AS di separazione fa coll'orizzontale,

ω l'angolo della parete del muro di sostegno coll'orizzontale.

Le forze, che agiscono nel masso terroso ABS, che si trova nel punto di staccarsi dal sottostante terrapieno, sono:

1° P, peso del prisma terroso ABS e del sovraccarico,

2° N, azione della parte di terrapieno sottostante al piano AS contro il prisma, che tende a scorrere sul piano stesso,

3° fN, attrito che sviluppasi nel piano AS,

4° N', azione della parete AB contro il prisma spingente ABS,

5° f'N', attrito che si sviluppa in tale parete.

Queste cinque forze si possono ridurre nelle tre seguenti:

1° Il peso P che agisce dall'alto al basso.

2° La risultante T delle forze N ed fN, la quale forma con la normale alla faccia AT un angolo eguale a φ, la cui tangente trigonometrica eguaglia il coefficiente di attrito.

3° La risultante S delle forze N' ed f'N', la quale forma con la perpendicolare alla parete AB un angolo φ' la cui tangente trigonometrica eguaglia f'.

Per l'equilibrio la somma delle componenti orizzontali di T ed S deve eguagliare zero, come pure deve essere nulla la somma delle componenti verticali e della forza P.

Ora dalla figura 145 si vede che:

$$\alpha = 180 - (90 + \beta) + \varphi = 90 - (\beta - \varphi),$$

quindi la componente orizzontale:

$$Q = T \ \cos.\alpha = T \ \text{sen.}(\beta - \varphi),$$

la componente verticale:

$$V = T \quad \text{sen.}\alpha = T \quad \cos.\,(\beta - \varphi),$$

come pure dalla figura 146 risulta:

$$\alpha = \omega - 90 + \varphi',$$

quindi la componente verticale:

$$V' = S \ \cos.(\omega + \varphi'),$$

la componente orizzontale:

$$Q' = S \ \text{sen.}(\omega + \varphi').$$

Per l'equilibrio risultano le equazioni:

$$T\,\text{sen.}(\beta - \varphi) + S\,\text{sen.}(\omega + \varphi') = 0 \qquad (1),$$

$$T\cos.(\beta - \varphi) - S\cos.(\omega + \varphi') - P = 0 \qquad (2).$$

Eliminato il T dalle equazioni (1), (2) risulta:

$$S = P\,\frac{\text{sen.}\,(\beta - \varphi)}{\text{sen.}\,(\varphi + \varphi' + \omega - \beta)} \qquad (I).$$

Posto $\varphi' = 0$, ossia trascurata la forza di attrito, che si sviluppa nella parete del muro di sostegno, si ottiene:

$$S = P\,\frac{\text{sen.}\,(\beta - \varphi)}{\text{sen.}\,(\varphi + \omega - \beta)} \qquad (II).$$

Il valore di S varia con β, si determini β che renda massimo S. Per determinare questo massimo senza analisi infinitesimale, ricorro al processo grafico pubblicato da Kleitz negli *Annales des Ponts et Chaussées.*

Sia BD (*Fig.* 147) la superficie superiore del terrapieno, AB la parete piana anteriore del muro di sostegno, AG la faccia di separazione del masso spingente dal sottostante terrapieno. Si conduca la retta AS che comprende colla AB l'angolo $BAS = \varphi$,

e la GT parallela ad AF, risulta il triangolo AGT, nel quale i lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti, perciò:

$$\frac{AT}{GT} = \frac{\text{sen.}AGT}{\text{sen.}GAT} = \frac{\text{sen.}(\beta - \varphi)}{\text{sen.}(\omega + \varphi - \beta)} \qquad (3).$$

Il peso P è dato dal prodotto dell'area del triangolo AGB per il peso g dell'unità di volume, per essere $= 1$ la lunghezza del terrapieno; posti nella (II) per P e per il rapporto $\frac{\text{sen.}(\varphi - \beta)}{\text{sen.}(\varphi + \omega - \beta)}$ i loro valori, risulta:

$$S = \frac{1}{2} g.\, AH.\, BG \frac{AT}{GT} \qquad (4).$$

Per essere GT parallela ad AF, risultano, le proporzioni:

$$AT : GF = SA : SF, \quad GT : FA = SG : SF,$$

dalle quali:

$$AT = \frac{GF.SA}{SF}, \quad GT = \frac{FA.SG}{SF},$$

$$\frac{AT}{GT} = \frac{GF.SA}{FA.SG} \qquad (5),$$

il quale valore posto in (4), dà:

$$S = \frac{1}{2} g \frac{AH.SA}{FA} \frac{BG.GF}{SG} \qquad (6),$$

il cui valore massimo risulta dal massimo di $\frac{BG.GF}{SG}$.

Pongasi $SG = x$, $SB = b$, $SF = a$, si ottiene:

$$\frac{BG.GF}{SG} = \frac{(x-b)(a-x)}{x} = \frac{ax - ab - x^2 + bx}{x} = v \quad (7).$$

Risolta rispetto ad x, si ottiene:

$$x = \frac{a+b-v}{2} \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{a+b-v}{2}\right)^2 - ab\right\}} \qquad (8),$$

il massimo di v si ottiene dall'equazione:

$$\left(\frac{a+b-v}{2}\right)^2 - ab = 0,$$

da cui:

$$v = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2,$$

quindi:

$$x = \frac{a+b-v}{2} = \sqrt{ab} \qquad (9),$$

ossia SG deve essere media proporzionale fra le due SB, SF, quindi la faccia di separazione del prisma di massima spinta sega la superficie superiore BF in modo da rendere $\overline{SG}^2 = SB \, . \, SF$.

Ora:

$$SG : SF = ST : SA,$$

quindi:

$$SB : SG = ST : SA \qquad (10);$$

quindi la retta BT sarà parallela alla AG, ed i triangoli AGB, AGT, i quali hanno la stessa altezza e la stessa base, sono equivalenti, ossia BG. AH = GT. AT'.

Posto in (4) tale valore, risulta:

$$S = \frac{1}{2} g GT \, . \, AT' \frac{AT}{GT} = \frac{1}{2} g \, . \, AT \, . \, AT' \qquad (11).$$

$$\text{Ma } AT' = AT \, . \, \text{sen.} GTA = AT \, . \, \text{sen.}(180 - TAG - AGT) =$$

$$= AT \, . \, \text{sen.} \omega,$$

quindi:

$$S = \frac{1}{2} g \, \overline{AT}^2 \, \text{sen.} \omega \qquad (III).$$

Graficamente il valore di S si trova col seguente metodo. Nella figura 148, AB sia la parete piana del muro di sostegno, BF la faccia superiore del terrapieno ed AE la orizzontale condotta da A. Tirisi AF inclinata di un angolo φ all'orizzontale. conducasi AS che forma l'angolo BAS $= \varphi$, colla BA. Si descriva sopra BF come diametro una semicirconferenza, e da S tirisi la tangente SR alla semicirconferenza.

Si prenda SR = SG, tirisi GT parallela ad AF ed AT′ normale a GT, il prodotto della metà AT. AT′ per g eguaglia l'intensità della spinta del masso ABG contro la parete AB del muro di sostegno.

La componente orizzontale di tale spinta è S sen.ω, la verticale è S cos.ω, quindi la spinta orizzontale è data da:

$$\frac{1}{2}\, g\, \overline{AT}^2 \text{ sen.}^2\omega\,;$$

la pressione verticale si ottiene da:

$$\frac{1}{2}\, g\, \overline{AT}^2 \text{ sen.}\omega \text{ cos.}\omega = \frac{1}{4}\, g\, \overline{AT}^2 \text{ sen. } 2\omega.$$

§ 117. **Casi particolari.** — I. Sia $\omega = 90$ (*Fig.* 149). Se la parete è verticale, allora la AS che fa l'angolo φ con la parete AB sarà diretta normalmenle ad AF, quindi trovato il punto G, da questo si conduca GT ortogonale ad AS, il valore della spinta diretta orizzontalmente sarà $\frac{1}{2}\, g\, \overline{AT}^2$, ossia si ottiene dal prodotto della metà del peso per il quadrato di AT.

II. Sia $\omega = 90$, e la faccia superiore del terrapieno sia orizzontale (*Fig.* 150). Sia la AF inclinata di un angolo φ coll'orizzontale, AB sia la parete interna del sostegno e BF la superficie orizzontale del terrapieno. In questo caso la retta AG dividente il massimo masso spingente dal sottostante terrapieno è bissettrice dell'angolo BAF; infatti

$$\overline{SG}^2 = SB\,(SB + BF) = SB^2 + BA^2,$$

per essere $SA^2 = SB^2 + BA^2$, risulta:

$$SA = SG \qquad (1).$$

Dal triangolo isoscele SGA si ottiene SGA = SAG = β.

Ma BGT = BAT = φ, perciò l'angolo BAG = $\beta - \varphi$.

Ora GAF = $\beta - \varphi$, quindi GA è bissettrice dell'angolo BAF = $= 90 - \varphi$.

Il peso del prisma ABG spingente è:

$$P = g\, \overline{AB}^2 \text{ tang. } \frac{90 - \varphi}{2} \qquad (2),$$

per essere:

$$\frac{\text{sen.}(\beta-\varphi)}{\text{sen.}(\omega+\varphi-\beta)}=\text{tang.}\ \frac{90-\varphi}{2};$$

si ottiene così:

$$S=\frac{1}{2}g\,\overline{AB}^2\ \text{tang.}^2\ \frac{90-\varphi}{2} \qquad (I).$$

Chiamata h l'altezza del muro AB, risulta:

$$S=\frac{1}{2}gh^2\ \text{tang.}^2\ \frac{90-\varphi}{2} \qquad (II).$$

Esempio. Posto $g=1500$ chilogrammi, $AB=8^m$, $\varphi=45°$, risulta: $S=9000$ chilogrammi.

III. La faccia superiore del terrapieno abbia l'inclinazione della scarpa naturale del terreno.

Il procedimento grafico per determinare la massima spinta contro il muro viene modificato, quando la superficie superiore del terrapieno ha l'inclinazione della scarpa naturale del terreno.

Il valore della spinta è:

$$S=P\,\frac{\text{sen.}(\beta-\varphi)}{\text{sen.}(\omega+\varphi-\beta)} \qquad (3).$$

L'angolo $FGA=\beta-\varphi$, l'angolo $FAG=\omega+\varphi-\beta$, risulta dunque:

$$\frac{AF}{FG}=\frac{\text{sen.}(\beta-\varphi)}{\text{sen.}(\omega+\varphi-\beta)};$$

la forza

$$S=\frac{1}{2}gAH\,.\,AF\,\frac{BG}{FG} \qquad (4).$$

Ma $\frac{BG}{FG}=\frac{TA}{FA}$, condotta la BT parallela ad AG, il massimo valore di TA è FA, quindi:

$$S=\frac{1}{2}g\,AH\,.\,FA=\frac{1}{2}g\,.\,\overline{FA}^2\ \text{sen.}AFH \qquad (5).$$

Ora:

$$AFH = 90 - HAF = 90 - (FAE - HAE) = 90 -$$

$$-(\omega + \varphi - \beta - 90 + \beta - \varphi) = 180 - \omega,$$

si ottiene la spinta:

$$S = \frac{1}{2} g \, FA^2 \, \text{sen.}\omega \qquad \text{(III).}$$

Si voglia esprimere S in funzione dell'altezza h del punto B al disopra del piano orizzontale passante per A. Nel triangolo FBA si ha:

$$FA = BA \frac{\text{sen.}FBA}{\text{sen.}BFA} = BA \frac{\text{sen.}(\omega - \varphi)}{\text{sen.}\omega} \qquad (6).$$

L'altezza $BM = h = BA \, \text{sen.}BAX = BA \, \text{sen.}(\omega + \varphi)$, da cui:

$$BA = \frac{h}{\text{sen.}(\omega + \varphi)},$$

il quale posto in (6), risulta:

$$FA = h \frac{\text{sen.}(\omega - \varphi)}{\text{sen.}\omega \, \text{sen.}(\omega + \varphi)} \qquad (7),$$

quindi:

$$S = \frac{1}{2} g \frac{h^2}{\text{sen.}\omega} \frac{\text{sen.}^2(\omega - \varphi)}{\text{sen.}^2(\omega + \varphi)} \qquad \text{(IV).}$$

Per $\omega = 90$, risulta:

$$S = \frac{1}{2} g h^2 \qquad \text{(V).}$$

Quando la massa spingente è liquida, la parete è verticale, allora $\varphi = 0$, $\omega = 90$ e la sua spinta $\frac{1}{2} g h^2$ eguaglia il peso di un prisma liquido, che ha per base la faccia premuta e per altezza la distanza del centro di gravità del rettangolo premuto dalla superficie del liquido.

FINE.

NOTE

NOTA I.

Sviluppo in serie della funzione $y = e^x$.

La funzione a^x si può supporre sviluppata in un polinomio in x della forma

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \dots \qquad (1).$$

dove A, B, C . . . restano indeterminate.

Analogamente sarà:

$$a^y = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + \dots \qquad (2).$$

La differenza

$$a^x - a^y = A(x - y) + B(x^2 - y^2) + C(x^3 - y^3) + \dots \qquad (3).$$

Ora

$$a^x - a^y = a^y (a^{x-y} - 1).$$

Ma

$$a^{x-y} - 1 = A(x - y) + B(x - y)^2 + C(x - y)^3 + \dots,$$

quindi:

$$a^x - a^y = a^y (a^{x-y} - 1) = a^y \{ A(x - y) + B(x - y)^2 +$$

$$+ C(x - y)^3 + \dots \}. \qquad (4)$$

Il 2° membro della (3) eguaglia quello della (4), quindi:

$$A(x-y)+B(x^2-y^2)+C(x^3-y^3)+\dots=$$

$$=a^y\{A(x-y)+B(x-y)^2+C(x-y)^3+\dots\}.$$

Dividendo tutti i termini per $x-y$, risulta:

$$A+B(x+y)+C(x^2+xy+y^2)+\dots=$$

$$=a^y\{A+B(x-y)+C(x-y)^2+\dots\} \qquad (5).$$

Ponendo $x=y$ la (5) si cambia nella

$$A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\dots=Aa^x,$$

ossia:

$$A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\dots=A\{1+Ax+Bx^2+Cx^3+\dots\},$$

da cui:

$$A=A,\quad 2B=A^2,\quad 3C=AB=\frac{A^3}{2},\quad 4D=AC=\frac{A^4}{6},\ \text{ecc.},$$

così abbiamo espresso i coefficienti A, B, C . . . in funzione del solo coefficiente A.

Prendendo il logaritmo iperbolico della (1), risulta:

$$x=\log.a=\log.\{1+Ax+Bx^2+\dots\}=\log.(1+\omega).$$

Ora

$$\log.(1+\omega)=\omega-\frac{\omega^2}{2}+\frac{\omega^3}{3}-\frac{\omega^4}{4}+\dots,$$

quindi:

$$x\log.a=\omega-\frac{\omega^2}{2}+\frac{\omega^3}{3}-\dots=(Ax+Bx^2+\dots)-$$

$$-\frac{1}{2}(A^2x^2+B^2x^4+\dots)+\frac{1}{3}(A^3x^3+\dots)-\dots$$

Il coefficiente di x del 1° membro deve eguagliare quello del 2° perciò $A = \log. a$, dunque:

$$a^x = 1 + x \log. a + x^2 \frac{\log.^2 a}{2} + x^3 \frac{\log.^3 a}{2 \,.\, 3} + \ldots$$

Finalmente per $a = e$ (base del sistema iperbolico), si ottiene:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \,.\, 3} + \ldots$$

NOTA II.

Somma delle potenze dei primi p numeri naturali, quando p è grandissimo.

Per lo sviluppo Newtoniano

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \,.\, 3} x^3 + \ldots$$

Ora per

$$x = 0, \quad 1^n = 1$$

$$x = 1, \quad 2^n = 1 + n \,.\, 1 + \frac{n(n-1)}{2} 1^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \,.\, 3} 1^3 + \ldots$$

$$x = 2, \quad 3^n = 1 + n \,.\, 2 + \frac{n(n-1)}{2} 2^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \,.\, 3} 2^3 + \ldots$$

. . . .

$$x = p - 1, \quad p^n = 1 + n(p-1) + \frac{n(n-1)}{2} p - 1)^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \,.\, 3} (p-1)^3 + \ldots$$

Chiamando $S^{(n)}$ la somma delle n potenze dei primi p numeri naturali, risulta:

$$S^{(n)} = n + n\,(S^{(1)} - p) + \frac{n\,(n-1)}{2}\,(S^{(2)} - p^2) +$$

$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{2\,.\,3}\,(S^{(3)} - p^3) + \ldots,$$

la quale espressione serve per trovare la somma delle prime, delle seconde, delle terze ecc. potenze dei primi p numeri naturali.

Poniamo $n = 2$, si ha:

$$S^{(2)} = 2 + 2\,(S^{(1)} - p) + S^{(2)} - p^2,$$

da cui:

$$2S^{(1)} = p^2 + 2p - 2,$$

per p grandissimo si possono trascurare le potenze inferiori alla massima, quindi:

$$S^{(1)} = \frac{p^2}{2}.$$

Per $n = 3$, risulta:

$$S^{(3)} = 3 + 3\,(S^{(1)} - p) + 3\,(S^{(2)} - p^2) + S^{(3)} - p^3,$$

da cui:

$$3S^{(2)} = 3p^2 + p^3 + 3p - 3S^{(1)} - 3,$$

per p grandissimo analogamente risulta:

$$S^{(2)} = \frac{p^3}{3},$$

così si può dedurre che per p grandissimo:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + p^3 = \frac{p^4}{4},$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + p^4 = \frac{p^5}{5},$$

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + p^5 = \frac{p^6}{6}.$$

. . . .

$$1^n + 2^n + 3^n + \ldots + p^n = \frac{p^{n+1}}{n+1}.$$

NOTA III.

Espressione del raggio di curvatura di un archetto in funzione della sua lunghezza e degli angoli delle tangenti nei punti estremi coll'asse delle ascisse.

Sia ab (*Fig.* 152) un archetto della linea AB così piccolo da potersi confondere con un arco di circolo avente centro in C, il raggio $aC = bC$. Riferiamo tale linea a due assi, dei quali XY è quello delle ascisse; siano hi ed eg le due tangenti nei punti a e b della linea; si ponga l'angolo $geY = \alpha_1$, l'angolo $ihY = \alpha_2$. Sia s la lunghezza dell'archetto ab avente $aC = bC = \rho$ per raggio di curvatura; δ l'arco di raggio $= 1$, che misura l'angolo aCb; si ottiene la proporzione:

$$1 : \delta = \rho : s,$$

da cui:

$$s = \rho\delta \qquad (1).$$

Si conduca per e la eK parallela ad hi, per essere eg normale ad aC, hi a Cb, risulterà l'angolo $geK = aCb = \delta$. Ora:

$$geK = geY - KeY = \alpha_1 - \alpha_2.$$

dunque:

$$\delta = \alpha_1 - \alpha_2 \qquad (2).$$

Ponendo nella (1) per δ il valore dato dalla (2), si ottiene:

$$s = \rho\delta = \rho\,(\alpha_1 - \alpha_2),$$

quindi:

$$\rho = \frac{s}{\alpha_1 - \alpha_2} \qquad (3).$$

NOTA IV.

Equazione della parabola e della sua tangente.

La parabola è la linea luogo dei punti, che distano egualmente da un punto fisso detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice. Sia MA*m* (*Fig.* 153) la linea, che ha tutti i punti equidistanti da F e da DGD', riferiamola agli assi AX, AY, il primo tangente nel vertice A, il secondo coincidente coll'asse della linea e troviamo la relazione tra le coordinate x, y di un suo punto M.

Poniamo la distanza $AF = AG = \frac{1}{2}p$, la distanza $FM = GP = z$. Ora dal triangolo rettangolo FMP risulta:

$$MP^2 + FP^2 = x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = z^2 \qquad (1).$$

Ma

$$GP = z = AP + GA = y + \frac{p}{2} \qquad (2),$$

quindi ponendo nella (1) per z il valore dato dalla (2), risulta:

$$x^2 + y^2 + \frac{p^2}{4} - py = y^2 + \frac{p^2}{4} + py,$$

da cui:

$$x^2 = 2py \qquad (3).$$

Chiamate X ed Y le coordinate di un punto fisso, si ha:

$$X^2 = 2pY,$$

da cui:

$$2p = \frac{X^2}{Y},$$

il quale valore posto in (3) dà:

$$x^2 = \frac{X^2}{Y}\,y \qquad (4),$$

da cui:

$$y = \frac{Y}{X^2} x^2 \qquad (5),$$

la quale è l'equazione della parabola riferita agli assi AX ed AY.

Equazione della tangente. L'equazione di una retta, che passa per due punti (x', y'), (x'', y'') è:

$$x - x' = \frac{x'' - x'}{y'' - y'} (y - y') \qquad (6).$$

Se (x', y'), (x'', y'') sono punti della parabola, devono soddisfare alle equazioni $x'^2 = 2py'$, $x''^2 = 2py''$; sottraendo la prima dalla seconda si ottiene:

$$x''^2 - x'^2 = 2p (y'' - y'),$$

da cui:

$$\frac{x'' - x'}{y'' - y'} = \frac{2p}{x'' + x'}.$$

Se i due punti si confondono in uno, allora $x'' = x'$, e l'equazione (6) si trasforma nella

$$x - x' = \frac{p}{x'} (y - y'),$$

da cui:

$$xx' = p (y - y'),$$

quindi esprimendo con β l'angolo della tangente nel punto (x', y') coll'asse della x si ottiene:

$$\text{tang.}\beta = \frac{x'}{p} = \frac{2Y}{X^2} x \qquad (7).$$

NOTA V.

Sviluppi in serie delle funzioni $y = \text{sen.}x$, $y = \cos.x$.

Le funzioni sen.x e cos.x si possono supporre sviluppate in due polinomii in x e stabilire così le eguaglianze:

$$\text{sen.}x = A_1 x + A_3 x^3 + A_5 x^5 + A_7 x^7 + \dots \qquad (1),$$

$$\cos.x = 1 + A_2x^2 + A_4x^4 + A_6x^6 + \ldots \qquad (2),$$

nelle quali, i coefficienti A_1, A_2, A_3, ... sono indeterminati.

Se nella relazione $\text{sen.}^2x + \cos.^2x - 1 = 0$, poniamo questi sviluppi avremo:

$$\left.\begin{array}{lllll} A_1^2x^2 + 2A_1A_3x^4 & + 2A_1A_5x^6 & + 2A_1A_7x^8 & + \ldots \\ & + A_3^2x^6 & + 2A_3A_5x^8 & + \ldots \\ + 2A_2x^2 + 2A_4x^4 & + 2A_6x^6 & + 2A_8x^8 & + \ldots \\ \quad + A_2^2x^4 & + 2A_2A_4x^6 & + 2A_2A_6x^8 & + \ldots \\ & & + A_4^2x^8 & + \ldots \end{array}\right\} = 0,$$

da cui:

$$A_2 + \frac{1}{2}A_1^2 = 0 \qquad A_6 + A_1A_5 + A_2A_4 + \frac{1}{2}A_3^2 = 0,$$

$$A_4 + A_3A_1 + \frac{1}{2}A_2^2 = 0 \qquad A_8 + A_1A_7 + A_6A_2 + A_5A_3 + \frac{1}{2}A_4^2 = 0,$$

. . . .

Ora ponendo nella (1) in luogo di x, $2x$ si avrà:

$$\text{sen.}2x = 2A_1x + 8A_3x^3 + 32A_5x^5 + 128A_7x^7 + \ldots$$

Per la relazione $\text{sen.}2x = 2\,\text{sen.}x\cos.x$, sarà:

$$2A_1x + 8A_3x^3 + 32A_5x^5 + 128A_7x^7 + \ldots =$$

$$\begin{array}{r} = 2A_1x + 2A_3x^3 + 2A_5x^5 + 2A_7x^7 + \ldots \\ 2A_1A_2x^3 + 2A_1A_3x^5 + 2A_2A_5x^7 + \ldots \\ + 2A_1A_4x^5 + 2A_3A_4x^7 + \ldots \\ + 2A_1A_6x^7 + \ldots \end{array}$$

e quindi:

$2A_1 = 2A_1$; $8A_3 = 2A_3 + 2A_1A_2$; $32A_5 = 2A_5 + 2A_2A_3 + 2A_1A_4$;

$$128A_7 = 2A_7 + 2A_6A_1 + 2A_5A_2 + 2A_4A_3\,.$$

esprimendo tutti i coefficienti per A_1, si avrà:

$$A_2 = -\frac{A_1^2}{2}; \quad A_3 = -\frac{A_1^3}{2.3}; \quad A_4 = \frac{A_1^4}{2.3.4}; \quad A_5 = \frac{A_1^5}{2.3.4.5};$$

$$A_6 = -\frac{A_1^6}{2.3.4.5.6}; \quad A_7 = -\frac{A_1^7}{2.3.4.5.6.7}; \quad \text{ecc.}$$

Sostituendo tali valori nelle (1) e (2), risulta:

$$\text{sen}.x = A_1 x - \frac{(A_1 x)^3}{2.3} + \frac{(A_1 x)^5}{2.3.4.5} - \frac{(A_1 x)^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

$$\cos.x = 1 - \frac{(A_1 x)^2}{2} + \frac{(A_1 x)^4}{2.3.4} - \frac{(A_1 x)^6}{2.3.4.5.6} + \ldots$$

Posto $A_1 = 1$ corrispondente all'arco minimo, si ha:

$$\text{sen}.x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \ldots$$

$$\cos.x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \ldots$$

NOTA VI.

Sviluppo in serie della funzione $x = \text{arc. sen}.y$.

La funzione $x = \text{arc. sen}.y$ si può supporre sviluppata in un polinomio in y, ossia si può porre:

$$x = \text{arc. sen}.y = Ay + By^3 + Cy^5 + Dy^7 + \ldots \quad (1).$$

Ora:

$$y = \text{sen}.x,$$

$$y_1 = \text{sen}.2x = 2\,\text{sen}.x \cos.x = 2y \sqrt{\{1 - y^2\}} = 2y(1 - y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Se poniamo nel primo membro della (1) in luogo di x, $2x$; si dovrà nel secondo sostituire y con $2y\,(1-y^2)^{\frac{1}{2}}$, così dalla (1). risulta:

$$2x = 2Ay\,(1-y^2)^{\frac{1}{2}} + 8By^3\,(1-y^2)^{\frac{3}{2}} + 32Cy^5\,(1-y^2)^{\frac{5}{2}} +$$

$$+ 128Dy^7\,(1-y^2)^{\frac{7}{2}} + \ldots$$

Ora:

$$(1-y^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^2}\,y^4 - \frac{1}{2\,.\,3}\,\frac{1}{2^2}\,y^6 + \ldots$$

$$(1-y^2)^{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}\,\frac{1}{2^2}\,y^4 - \ldots$$

$$(1-y^2)^{\frac{5}{2}} = 1 - \frac{5}{2}y^2 + \frac{5}{2}\,\frac{1}{2^2}\,y^4 - \ldots$$

$$(1-y^2)^{\frac{7}{2}} = 1 - \frac{7}{2}y^2 + \frac{7}{2}\,\frac{1}{2^2}\,y^4 - \ldots$$

e perciò:

$$\begin{aligned} 2x = 2Ay - Ay^3 - \frac{A}{4}\,y^5 - \frac{A}{8}\,y^7 - \ldots \\ + 8By^3 - 12By^5 + 3By^7 + \ldots \\ + 32Cy^5 - 80Cy^7 + \ldots \\ + 128Dy^7 - \ldots \end{aligned}$$

ma devesi pure avere:

$$2x = 2Ay + 2By^3 + 2Cy^5 + 2Dy^7 + \ldots$$

sarà quindi:

$$2A = 2A \qquad 128D - 80C + 3B - \frac{A}{8} = 2D,$$

$$8B - A = 2B \qquad\qquad \text{ecc.}$$

$$32C - 12B - \frac{A}{4} = 2C,$$

dalle quali risulta:

$$A = A$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{3}$$

$$C = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \frac{A}{5}$$

$$D = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \frac{A}{7} \text{ ecc.}$$

Finalmente per $A = 1$, risulta:

$$\text{arc. sen.} y = y + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{y^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \frac{y^7}{7} + \ldots$$

NOTA VII.

Costruzione della parabola di dato parametro.

Nell'equazione $y^2 = 2px$ della parabola riferita ai suoi assi principali, il coefficiente $2p$ di x, doppio della distanza del fuoco dalla direttrice, dicesi *parametro;* dato questo, saranno conosciute le posizioni degli assi, del fuoco e della direttrice.

Sia XX l'asse delle ascisse (*Fig.* 154); preso V per vertice della parabola, si porti a dritta ed a sinistra del detto punto una lunghezza $= \frac{1}{2} p$, ossia si prenda $VF = VG = \frac{p}{2}$ si conducano dai punti V e G le rette DD, YY ortogonali ad XX, la prima sarà la direttrice, la seconda l'asse delle ordinate.

Per la data definizione sarà ora facile il costrurre la parabola per punti, la quale avrà la retta XX per asse di simmetria, YY per tangente nel vertice.

Per ottenere una coppia di punti, si conduca per un punto P qualunque di XX una perpendicolare a questo asse, fatto centro in F con raggio GP si descriva un arco di circolo, il quale sega la retta KPH nei due punti M ed M', i quali apparterranno alla linea da tracciarsi, per essere egualmente lontani dal fuoco e dalla direttrice.

La parabola può essere descritta con moto continuo. Presa una squadra, della quale il cateto QR sia obbligato a scorrere lungo la direttrice DD, si fissino ai punti F e U le estremità di un filo di lunghezza eguale all'altro cateto QU.

Si faccia muovere la squadra lungo DD, avendo cura di tenere teso il filo mediante una punta (lapis), che si appoggia costantemente sopra QV; questa nel suo moto traccierà i due archi VM, VM' della parabola.

INDICE

PARTE PRIMA

RESISTENZA DEI MATERIALI

CAPITOLO VIII.

CAPITOLO IX.

CAPITOLO X.

CAPITOLO XI.

PARTE SECONDA

APPLICAZIONI

CAPITOLO I.

CAPITOLO II.

CAPITOLO III.

CAPITOLO IV.

NOTE

Errata — Corrige.

Pag.	Linea	Errore	Correzione
8	25	$l =$	$l \lambda =$
9	16	0,0036	0,00036
19	3	$\Sigma(\quad z^2)$	$\Sigma(\omega z^2)$
20	14	BP	BD
23	19	Ac	aC
28	5	CDde	CDdc
56	19	CSA	CJA
56	20	FHA	FKA
83	28	ApqB	ApqC
97	27	T_1	T_3
98	3	uu	vu
106	13	DEI	TBF
110	20	0'M	0'N
135	13	bb	bB
143	10	proiezione	proporzione
154	15	$2a6$	$2ab$
158	29	$\frac{2\delta}{c} 2\delta$	$\frac{2\delta}{c} \delta$
158	30	$\frac{n\delta}{c} n\delta$	$\frac{n\delta}{c} \delta$
169	22	F	E
193	2	$\frac{1}{2n\pi}$	$\frac{1}{n\pi}$
329	29	$\frac{M_m}{K_m}$	$\frac{M_m}{H_m}$
331	21	travate	tavole
347	16	$p - 1)^2$	$(p - 1)^2$

Nella Tabella a pag. 326, linea 8, colonna **3** si ommise 614, e leggasi perciò:

$K_3 = \frac{U_m}{\Omega}$		614	672	650	680	680

L'ARTE DI FABBRICARE

ossia

CORSO COMPLETO D'ISTITUZIONI TEORICO-PRATICHE

per gli Ingegneri, per gli Architetti, pei Periti in costruzione, pei Periti Misuratori, per gli Intraprenditori, pei Capomastri e per quanti si trovano applicati o vogliono applicarsi all'esecuzione ed alla sorveglianza di costruzioni civili, stradali e idrauliche, con molte tavole illustrative,

del Cav. Ing. Prof.

GIOVANNI CURIONI

L'opera intera consta dei seguenti sei Volumi in 8° gr.:

Operazioni topografiche, con Atlante di 32 tavole, 2ª edizione . . . . L. 15 50

(Per uso delle scuole si fece un'edizione economica di quest'opera, al prezzo di L. 6).

Materiali da costruzione e analisi dei loro prezzi, con Atlante di 15 tavole, 3ª edizione . . . . » 9 50

Lavori generali di Architettura civile, stradale ed idraulica ed analisi dei loro prezzi, con Atlante di 37 tavole, 2ª edizione . . . . » 19 50

Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni, con Atlante di 12 tavole, 2ª edizione . . . . » 13 »

Geometria pratica applicata all'arte del costruttore, con Atlante di 17 tavole, 2ª edizione . . . » 11 »

(Per uso delle scuole si fece un'edizione economica di quest'opera, al prezzo di L. 5).

Costruzioni civili, stradali ed idrauliche, con Atlante di 38 tavole, 2ª edizione . . . . » 22 25

Per coloro che faranno acquisto dei sei Volumi in una sol volta, il prezzo è fissato a L. 72 50, come venne pagato dagli Associati durante la pubblicazione dell'opera.

APPENDICE ALL'ARTE DI FABBRICARE

per cura dello stesso Prof. CURIONI

Nella medesima vengono esposti i moderni progressi della scienza delle costruzioni, i complementi di quelle quistioni alle quali non fu possibile dare sufficiente sviluppo nel corso dell'*Arte di Fabbricare*, ed i processi sopra casi particolari per la redazione di progetti completi di diverse ed importanti costruzioni.

Nel corso di ogni anno si pubblicherà, nello stesso formato dell'*Arte di Fabbricare*, un Volume che sarà distribuito a dispense bimestrali o trimestrali di 4 a 6 fogli di stampa di 16 pagine colle relative tavole.

Il prezzo di ciascun foglio e di ciascuna tavola è fissato a Centesimi trenta. Le tavole doppie costano il doppio.

Le associazioni non sono obbligatorie che di Volume in Volume, e si ricevono presso i principali librai.

Le persone che vorranno ricevere direttamente dalla Casa Editrice le dispense, pagheranno Lire dieci al principio di ogni Volume e rimetteranno poi il compimento del prezzo alla fine di ognuno di essi.

MONOGRAFIE TECNICHE

attinenti alla

INGEGNERIA

È in vendita la seguente Monografia, stampata nello stesso formato dell'Arte di Fabbricare

IL CANALE SUSSIDIARIO CAVOUR

per l'Ingegnere ENRICO BENAZZO Direttore locale dei lavori.

Un Volume in 8° gr. con sette grandi tavole, L. 5.

TRATTATO

DELLA

RESISTENZA DEI MATERIALI

APPLICATA

ALLE COSTRUZIONI IN LEGNO, IN FERRO ED IN MURATURA

SENZA ANALISI INFINITESIMALE

ad uso

DEGLI ISTITUTI TECNICI

DEI PERITI COSTRUTTORI E MECCANICI

DEGLI INGEGNERI E DEGLI ARCHITETTI



PER

LAZZARO FUBINI

Ingegnere laureato

e Professore nel R. Istituto Industriale e Professionale di Venezia.

TAVOLE e TABELLE

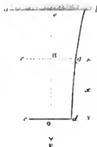


TORINO

PRESSO AUGUSTO FEDERICO NEGRO EDITORE

4, via Alfieri, 4




Fig. 1

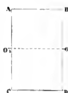
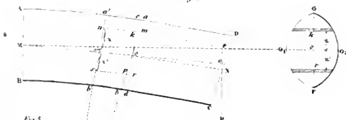
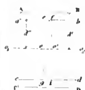
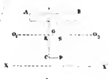
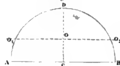

Fig. 3

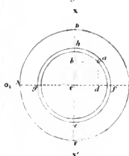

Fig. 4

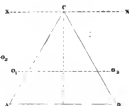

Fig. 2


Fig. 5


Fig. 7


Fig. 8


Fig. 6


Fig. 9

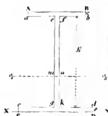

Fig. 10

Fig. 11

Fig. 12

Fig. 13

Fig. 14

Fig. 15

Fig. 16

Fig. 17

Fig. 18

Fig. 18bis

Fig. 19

Fig. 20

Fig. 21

Fig. 22

Fig. 23

Fig. 24

Fig. 26

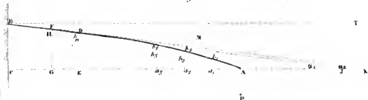


Fig. 27

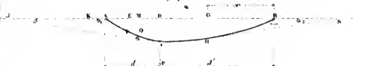


Fig. 28

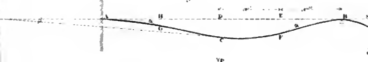


Fig. 29

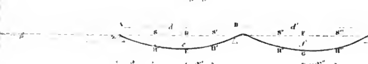


Fig. 31

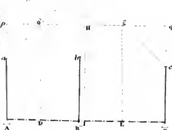


Fig. 25

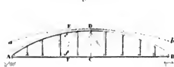
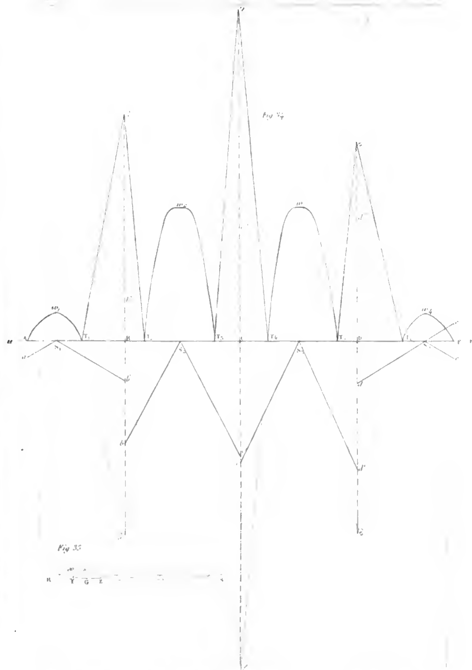


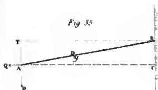
Fig. 30

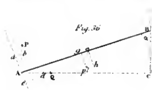


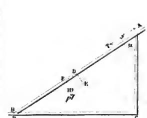
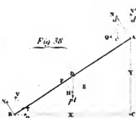
Fig. 32

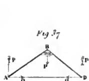


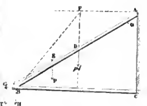
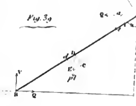

Fig. 34
Fig. 35

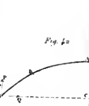

Fig. 35

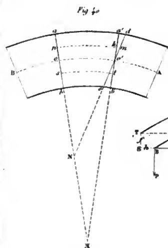

Fig. 36

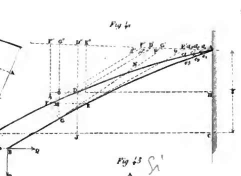


Fig. 38

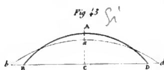

Fig. 37



Fig. 39


Fig. 42

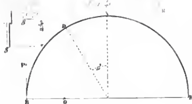

Fig. 40

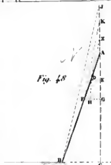

Fig. 41

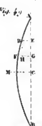

Fig. 43

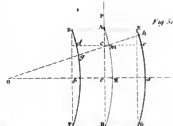







Fig. 48


Fig. 49


Fig. 50

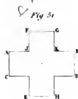
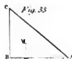

Fig. 51


Fig. 52


Fig. 53


Fig. 54


Fig. 55

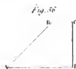

Fig. 56

Fig. 57





Fig. 58



Fig. 59



Fig. 60



Fig. 61



Fig. 62



Fig. 63

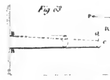


Fig. 64

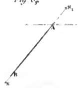


Fig. 65



Fig. 66

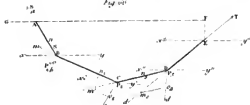


Fig. 67

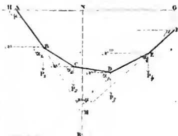


Fig. 68

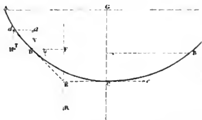


Fig. 69

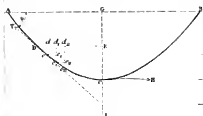


Fig. 70

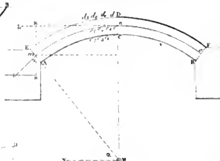


Fig. 71

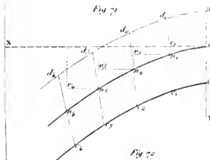


Fig. 73

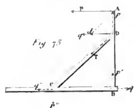


Fig. 72

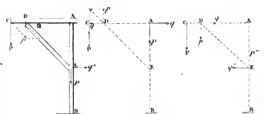


Fig. 74

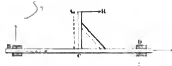


Fig. 75

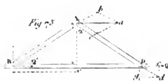


Fig. 76



Fig. 77

Fig. 78



Fig. 79



Fig. 80



Fig. 82



Fig. 81

Fig. 83

Fig. 84

Fig. 85

Fig. 86

Fig. 87

Fig. 88

Fig. 89

Fig. 90

Fig. 91

Fig. 92

Fig. 93

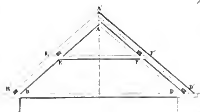
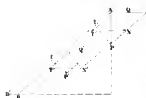



Fig. 94

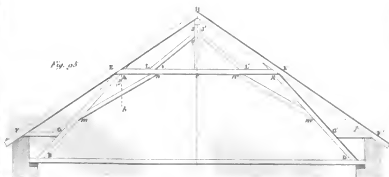


Fig. 95

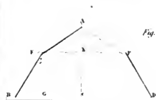



Fig. 96

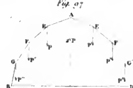


Fig. 97

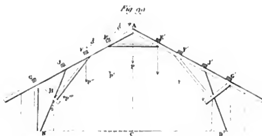
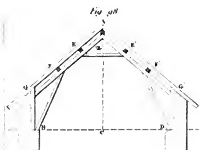
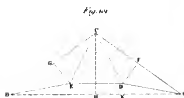
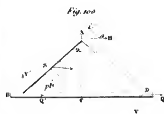


Fig. 99


Fig. 98


Fig. 101


Fig. 100

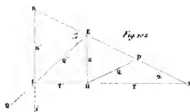
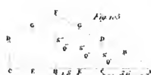
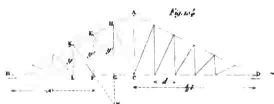
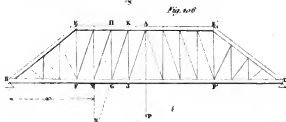
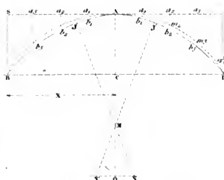

Fig. 102

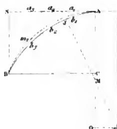

Fig. 103

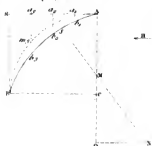

Fig. 105

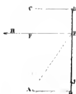

Fig. 104

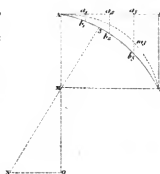

Fig. 106


Fig. 107


Fig. 108


Fig. 109


Fig. 120


Fig. 110

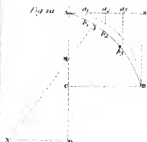

Fig. 111


Fig. 112


Fig. 113

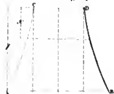
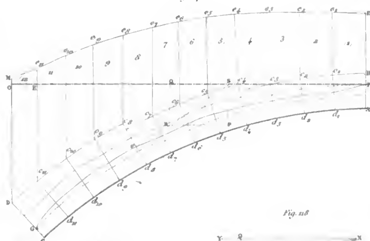
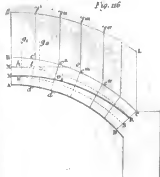
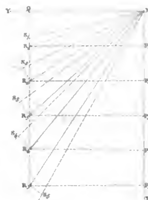

Fig. 114


Fig. 119


Fig. 117


Fig. 116


Fig. 118

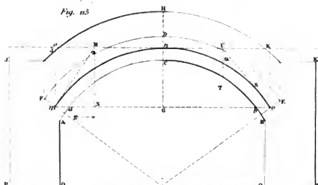

Fig. 115

Fig. 121

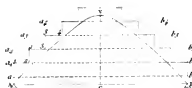


Fig. 122

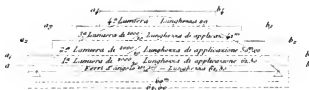


Fig. 123

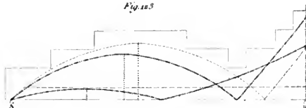


Fig. 126

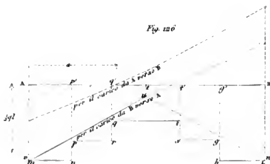
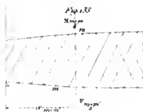
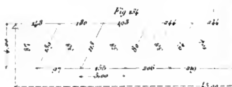
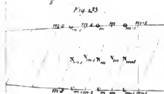
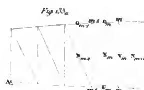
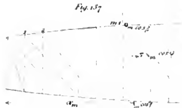
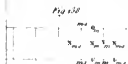
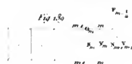
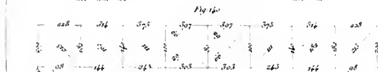


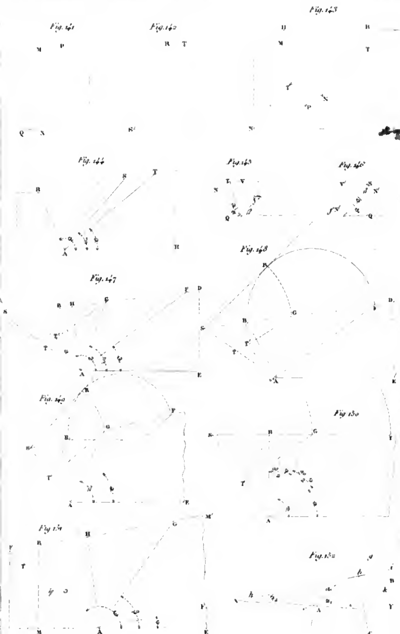
Fig. 124







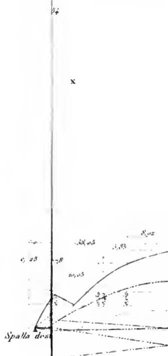

Spalla des

TABELLA I.

Valori in chilogrammi del coefficiente K_1 di resistenza alla rottura per estensione per corpi di 1 centimetro quadrato di sezione.

Indicazione dei corpi	Coefficiente K_1	Indicazione dei corpi	Coefficiente K_1
Quercia nel senso delle fibre	600—1000 kg.	Pietra arenaria	14 kg.
Larice rosso nel senso delle fibre	700—1000 »	Materiale laterizio ben cotto	18 — 25 »
Olmo nel senso delle fibre	500— 700 »	Malta composta di sabbia quarzosa e di calce idraulica	3,6 — 10 »
Ontano nel senso delle fibre	400— 500 »	Malta di calce grassa e sabbia	0,7 — 3 »
Ferro in fili	6000—9000 »	Malta di parti eguali di cemento e di sabbia .	9 — 20 »
Ferro laminato	3000—6000 »	Funi bianche nuove di diametro da 0,m 0088 a 0,m 0200	5 — 28 »
Ghisa	900—1500 »	Funi incatramate di diametro da 0m,0096 a 0m,023	6 — 33 »
Pietra calcarea	60 »		
Pietra calcarea bianca a grana fina ed omogenea	15 »		

TABELLA II.

Valori in chilogrammi del coefficiente K_2 di resistenza alla rottura per compressione per c.m.q. di sezione dei corpi, la cui altezza non supera di molto la più piccola delle dimensioni trasversali.

Indicazione dei corpi	Coefficiente K_2	Indicazione dei corpi	Coefficiente K_2
Quercia	190— 460 kg.	Pietra argillosa di Firenze	420 kg.
Larice rosso	375— 500 »	Mattoni poco cotti (albasi)	40 — 60 »
Abete	100— 200 »	Mattoni ben cotti (forti, ferrioli)	100 — 150 »
Ferro	3000 »	Malta di calce grassa e sabbia dopo 18 mesi di indurimento	30
Ghisa	7000—9500 »	Malta di calce idraulica e sabbia	40 — 70 »
Granito	400— 700 »	Malta di calce grassa e pozzolana	30 — 40 »
Marmo	300— 600 »	Gesso impastato con acqua	50 »
Pietra silicea dura . .	400— 900 »	Calcestruzzo fatto con buona malta idraulica dopo 18 mesi di indurimento	48 »
Pietra arenaria di mediocre qualità	90— 250 »		
Pietra calcarea	86— 500 »		
Pudinga a grana fina	250 »		
Tufo di Roma	57 »		
Lava di Napoli (piperno)	590 »		

TABELLA III.

Valori di λ, E ed R in chilogrammi per corpi di 1 centimetro quadrato di sezione.

Indicazione dei corpi	λ massimo allungamento dentro i limiti dell'elasticità	E modulo di elasticità	R il massimo peso può sopportare senza alterazione dell'elasticità
Legno	$\frac{1}{850} = 0{,}00117$	110 000 chilogr.	200 chilogr.
Ferro in fili . . .	$\frac{1}{600} = 0{,}00166$	2 000 000 »	4000 »
Ferro laminato .	$\frac{1}{1520} = 0{,}00060$	2 000 000 »	3600 »
Ghisa	$\frac{1}{1200} = 0{,}00030$	1 100 000 »	330 »

Osservazione. — **Il coefficiente di resistenza alla rottura per scorrimento trasversale,** per la ghisa e per il ferro, si assume eguale al coefficiente K_1; per la quercia di chilogr. 1,50; per il larice rosso di chilogr. 1,30 per m.m.q. di sezione trasversale; per le malte da chilogr. 0,01 a 0,20 per ogni m.m.q. della superficie, sopra la quale la rottura tende a manifestarsi.

Il coefficiente di resistenza alla rottura per torsione riferita al millimetro quadrato è di chilogr. 4 per la quercia e pel larice rosso; 60 per l'acciaio e ferro; 20 per la ghisa.

TABELLA IV.

Valori dei pesi del metro cubo di diversi materiali.

Indicazione dei corpi	Peso del metro cubo	Indicazione dei corpi	Peso del metro cubo
Abete	500 chilogr.	Gesso impastato solidamente	1500 kg.
Larice rosso . . .	700 »	Muratura di pietrame calcare e siliceo . . .	1700—2300 »
Quercia	850 »	Muratura di mattoni. .	2000—2200 »
Ferro	7770 »	Muratura di calcestruzzo	2200 »
Ghisa	7200 »	Muratura di pietrame granitico	2300 »

TABELLA V.

Valori del coefficiente di resistenza (P) di un corpo prismatico di legno o di ferro, la cui altezza è n volte il diametro d, oppure il lato più piccolo d della sezione trasversale di area Ω.

VALORI DI n	VALORI DELL'ALTEZZA $l = nd$	PER CILINDRI DI SEZIONE CIRCOLARE $P = \frac{K_2\,\Omega}{1 + 0{,}00162\ n^2}$	PER PRISMI DI SEZIONE RETTANGOLARE $P = \frac{K_2\,\Omega}{1 + 0{,}00122\ n^2}$
2	$l = 2d$	$P = 0{,}993\ K_2\,\Omega$	$P = 0{,}995\ K_2\,\Omega$
4	$4d$	$0{,}975\ K_2\,\Omega$	$0{,}980\ K_2\,\Omega$
6	$6d$	$0{,}945\ K_2\,\Omega$	$0{,}958\ K_2\,\Omega$
8	$8d$	$0{,}907\ K_2\,\Omega$	$0{,}927\ K_2\,\Omega$
10	$10d$	$0{,}860\ K_2\,\Omega$	$0{,}890\ K_2\,\Omega$
12	$12d$	$0{,}813\ K_2\,\Omega$	$0{,}850\ K_2\,\Omega$
14	$14d$	$0{,}758\ K_2\,\Omega$	$0{,}807\ K_2\,\Omega$
16	$16d$	$0{,}706\ K_2\,\Omega$	$0{,}762\ K_2\,\Omega$
18	$18d$	$0{,}655\ K_2\,\Omega$	$0{,}716\ K_2\,\Omega$
20	$20d$	$0{,}607\ K_2\,\Omega$	$0{,}670\ K_2\,\Omega$
25	$25d$	$0{,}496\ K_2\,\Omega$	$0{,}516\ K_2\,\Omega$
30	$30d$	$0{,}406\ K_2\,\Omega$	$0{,}476\ K_2\,\Omega$
40	$40d$	$0{,}280\ K_2\,\Omega$	$0{,}340\ K_2\,\Omega$
50	$50d$	$0{,}200\ K_2\,\Omega$	$0{,}243\ K_2\,\Omega$
100	$100d$	$0{,}060\ K_2\,\Omega$	$0{,}075\ K_2\,\Omega$

TABELLA Va.

Valori del coefficiente di resistenza (P) alla compressione di un cilindro di ghisa, la cui altezza è n volte il diametro (d) della sua sezione di area Ω.

VALORI DI n	ALTEZZA $l = nd$	VALORI DI $P = \frac{K_2\,\Omega}{1 + 0{,}01\ n^2}$
2	$l = 2d$	$P = 0{,}991\ K_2\,\Omega$
4	$4d$	$0{,}862\ K_2\,\Omega$
6	$6d$	$0{,}736\ K_2\,\Omega$
8	$8d$	$0{,}610\ K_2\,\Omega$
10	$10d$	$0{,}500\ K_2\,\Omega$
12	$12d$	$0{,}410\ K_2\,\Omega$
14	$14d$	$0{,}336\ K_2\,\Omega$
16	$16d$	$0{,}280\ K_2\,\Omega$
18	$18d$	$0{,}235\ K_2\,\Omega$
20	$20d$	$0{,}200\ K_2\,\Omega$
25	$25d$	$0{,}137\ K_2\,\Omega$
30	$30d$	$0{,}100\ K_2\,\Omega$
40	$40d$	$0{,}059\ K_2\,\Omega$
50	$50d$	$0{,}038\ K_2\,\Omega$
100	$100d$	$0{,}010\ K_2\,\Omega$

TABELLA VI.

Valori dei momenti d'inerzia e di quelli di resistenza per diverse sezioni.

FORMA DELLA SEZIONE	MOMENTO D'INERZIA T	Momento di resistenza $W = \frac{RT}{\frac{1}{2}h}$
Sezione rettangolare di base b e di altezza h (fig. 3) .	$\frac{1}{12} bh^3$	$\frac{1}{6} Rbh^2 = \frac{1}{6} RFh$
Sezione rettangolare vuota (fig. 4)	$\frac{1}{12} (bh^3 - b'h'^3)$	$\frac{1}{6} R \frac{bh^3 - b'h'^3}{h}$
Sezione a doppio T simmetrico (fig. 5)	$\frac{1}{12} [bh^3 - (b - a) h'^3]$	$\frac{1}{6} R \frac{bh^3 - (b - a) h'^3}{h}$
Sezione a doppio T simmetrico, nella quale si trascura il gambo	$\frac{1}{12} b (h^3 - h'^3)$	$\frac{1}{6} R \frac{b (h^3 - h_1^3)}{h}$
Sezione crociforme, della quale il braccio verticale ha l'altezza h e la base b', quello orizzontale ha la base b e l'altezza h' . .	$\frac{b'h^3 + (b - b') h'^3}{12}$	$\frac{1}{6} R \frac{b'h^3 + (b - b') h'^3}{h}$
Sezione circolare di diametro d	$\frac{1}{64} \pi d^4$	$\frac{1}{32} R\pi d^3 = \frac{1}{8} RFd$
Sezione annullare di diametro maggiore D e di diametro minore d . . .	$\frac{1}{64} \pi (D^4 - d^4)$	$\frac{1}{32} \pi \frac{D^4 - d^4}{D}$
Sezione semicircolare di raggio r (fig. 8)	$0{,}11\ r^4$	$0{,}193\ Rr^3$
Sezione triangolare con base orizzontale (fig. 9) . . .	$\frac{1}{36} bh^3$	$\frac{1}{24} Rbh^2 = \frac{1}{12} RFh$
Sezione a doppio T non simmetrico (fig. 10), nella quale $AC = h$, $eg = h_1$, $CD = b_1$, $AB = b_2$, $ef = b_3$, $Dd = c_1$, $Bb = c_2$ . . .	$\frac{1}{3} \{ b_1 c_1^3 + b_2 [h^3 - (h_1 + c_1)^3] + b^3 (h_1^3 - c_1^3) \} - d^2 (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 h_1)$	$\frac{R}{h - d} T$ oppure $\frac{R}{d} T$
Sezione a doppio T molto alta, nella quale $c_1 = c_2$ ed h' è l'altezza del gambo (fig. 12)		$h'K_1F_1 = h'K_2F_2$

TABELLA VII.

Travi sollecitate alla flessione da forze, la cui risultante è normale all'asse.

DISPOSIZIONI DELLE TRAVI	Ascissa della sezione più pericolosa	MOMENTO inflettente massimo M_m	ASCISSA della sezione, che subisce il massimo spostamento verticale	SAETTA della linea elastica
Trave orizzontale di lunghezza l, incastrata ad una estremità e sollecitata nell'altra dal peso $P = ql$.	o	$Pl = ql^2$	l	$\frac{1}{3} \quad \frac{ql^4}{ET}$
Trave orizzontale di lunghezza l, incastrata ad una estremità e sollecitata dal peso ql uniformemente distribuito nella sua lunghezza.	o	$\frac{1}{2} ql^2$	l	$\frac{1}{8}$ »
Trave orizzontale appoggiata alle due estremità e sollecitata nel mezzo dal peso $P = ql$.	$\frac{l}{2}$	$\frac{Pl}{4} = \frac{1}{4} ql^2$	$\frac{l}{2}$	$\frac{1}{48}$ »
Trave orizzontale appoggiata alle due estremità e sollecitata dal peso ql uniformemente distribuito nella lunghezza l.	$\frac{l}{2}$	$\frac{1}{8} ql^2$	$\frac{l}{2}$	$\frac{5}{384}$ »
Trave orizzontale di lunghezza l incastrata alle due estremità e sollecitata nel mezzo dal peso $P = ql$.	$\left.\begin{matrix} o \\ \frac{l}{2} \\ l \end{matrix}\right\}$	$\frac{Pl}{8} = \frac{1}{8} ql^2$	$\frac{l}{2}$	$\frac{1}{192}$ »
Trave incastrata alle due estremità e sollecitata nella sua lunghezza l dal peso ql uniformemente distribuito.	$\left.\begin{matrix} o \\ l \end{matrix}\right\}$ $\frac{l}{2}$	$\frac{ql^2}{12}$ $\frac{ql^2}{24}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{1}{384}$ »
Trave orizzontale di lunghezza l incastrata alle due estremità e sollecitata da un peso P applicato alla distanza λ dall'estremo A.	in A $= o$ λ l	$P \frac{\lambda (l-\lambda)^2}{l^2}$ $P \frac{\lambda^2 (l-\lambda)^2}{2l^3}$ $P \frac{\lambda^2 (l-\lambda)}{l^2}$	— — —	— — —
Trave orizzontale di lunghezza l appoggiata alle due estremità e sollecitata da due pesi posti alla distanza λ da ciascuno degli estremi.	λ	$P\lambda$	$\frac{l}{2}$	$\frac{\lambda(3l^2 - 4\lambda^2)}{24l^3} \cdot \frac{P}{ET}$
Trave orizzontale di lunghezza l incastrata alle due estremità e sollecitata da due pesi posti a distanza λ da ciascuno degli estremi.	o λ	$P\lambda \frac{l-\lambda}{l}$ $P \frac{\lambda^2}{2}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{\lambda^2 (3l - 4\lambda)}{24} \cdot \frac{P}{ET}$

TABELLA VIII.

Travi sollecitate da forze, la cui risultante è obliqua all'asse.

DISPOSIZIONI DELLE TRAVI	EQUAZIONI DI STABILITÀ	SAETTE	Reazioni degli appoggi	
			Pressione	Spinta
Trave orizzontale incastrata ad una estremità e sollecitata nell'altra dal peso P e dalla forza orizzontale Q (fig. 35) e nella sua lunghezza dal carico pl uniformemente distribuito.	$\frac{R}{E} = \frac{Q}{\Omega E} + \frac{h}{2ET}\left(Pl + \frac{1}{2} pl^2\right)$	$f = \frac{1}{ET}\left(\frac{1}{3} Pl^3 + \frac{1}{8} pl^4\right)$	—	—
Trave rettilinea inclinata di un angolo α colla verticale incastrata ad una estremità e sollecitata nell'altra da una forza verticale P diretta verso l'alto, da una orizzontale Q diretta verso la sezione d'incastro e da un peso pl uniformemente distribuito nella lunghezza l (fig. 36).	$\frac{R}{E} = \frac{Q_{sen.\alpha} + (P - pl)_{cos.\alpha}}{\Omega E} + \frac{h}{2ET}\left[(Q_{cos.\alpha} - P_{sen.\alpha})l + p\,sen.\alpha\frac{l^2}{2}\right]$	$f = \frac{1}{ET}\left[(Q_{cos.\alpha} - P\,sen.\alpha)\frac{l^3}{3} + p\,sen.\alpha\frac{l^4}{8}\right]$	—	—
Trave, la quale inclinata di un angolo α colla verticale e caricata di un peso pl nella sua lunghezza, è incastrata ad una estremità ed appoggia coll'altra sopra un piano orizzontale.	$\frac{R}{E} = \frac{pl\,sen.\alpha}{E}\left[\frac{5}{8}\frac{tg.\alpha}{\Omega} + \frac{h}{2T}\frac{l}{8}\right]$	—	pl	$\frac{5}{8}pl_{tang.\alpha}$
Due travi, disposte come i lati eguali di un triangolo isoscele in un piano verticale, appoggiano con una delle loro estremità sopra un piano orizzontale e sopportano nella loro sezione d'incontro il peso P (fig. 37).	$\frac{R}{E} = \frac{P}{2\Omega E\,cos.\alpha}$	—	$\frac{1}{2}P$	$\frac{1}{2}P_{tang.\alpha}$
Trave inclinata alla verticale di un angolo α, caricata di un peso pl uniformemente distribuito nella lunghezza l, appoggia sopra sostegni, che si oppongono ad ogni spostamento dei punti estremi (fig. 38).	$\Omega = \frac{pl}{2R}\left(cos.\alpha + \frac{1}{8}\frac{h\Omega}{T} l\,sen.\alpha\right)$	—	$V = \frac{1}{2}pl(1 + cos.^2\alpha)$ $V' = \frac{1}{2}pl\,sen.^2\alpha$	$\frac{1}{4}pl\,sen.2\alpha$
Trave inclinata all'orizzontale, la quale nell'estremità superiore appoggia contro una parete verticale, nella inferiore è connessa stabilmente ad una trave ed è caricata nella sua lunghezza da un peso uniformemente distribuito (fig. 39).	$\Omega = \frac{1}{R}\left[\frac{pl}{2\,cos.\alpha} + \frac{h\Omega}{2T}\frac{1}{8}pl^2\,sen.\alpha\right]$	—	pl	$\frac{1}{2}pl_{tang.\alpha}$

TABELLA IX. — **Prismi inizialmente curvi.**

Forma degli archi e loro disposizione	MASSIMO SPOSTAMENTO orizzontale	MASSIMO SPOSTAMENTO verticale	TENSIONE O PRESSIONE	Reazione degli appoggi: componente orizzontale	Reazione degli appoggi: componente verticale
Arco parabolico incastrato nel vertice e colla concavità rivolta al basso, è sollecitato nell'estremo da un peso P e da una forza orizzontale Q diretta verso la sezione d'incastro e nella sua lunghezza da un peso pX uniformemente distribuito nella proiezione orizzontale X (fig. 41).	$h = \frac{1}{ET}\left[P\left(\frac{5X^2Y}{12}+\frac{Y^3}{10}-\ldots\right)+ Q\left(\frac{8XY^2}{15}+\frac{16Y^4}{105X}-\ldots\ldots\right)+ p\left(\frac{3X^3Y}{20}+\frac{XY^3}{42}+\ldots\right)\right]$	$f = \frac{1}{ET}\left[P\left(\frac{X^3}{3}+\frac{XY^2}{15}-\ldots\right)+ Q\left(\frac{5X^2Y}{12}+\frac{Y^3}{10}-\ldots\ldots\right)+ p\left(\frac{X^4}{8}+\frac{X^2Y^2}{60}+\ldots\right)\right]$	$T_x = \frac{QX^2-[P+p(X-x)]2Y_x}{\sqrt{X^4+4Y^2x^2}}$	—	—
Arco parabolico incastrato nel vertice e colla concavità rivolta al basso viene sollecitato nell'estremo da una forza verticale P diretta in alto e da una orizzontale Q diretta verso la sezione d'incastro e da un peso pX uniformemente distribuito nella proiezione orizzontale X.	$h = \frac{1}{ET}\left[P\left(\frac{5X^2Y}{12}+\frac{Y^3}{10}\right)- Q\left(\frac{8XY^2}{15}+\frac{16Y^4}{105X}\right)- p\left(\frac{3X^3Y}{20}+\frac{XY^3}{42}\right)\right]$	$f = \frac{1}{ET}\left[-P\left(\frac{X^3}{3}+\frac{XY^2}{15}\right)+ Q\left(\frac{5X^2Y}{12}+\frac{Y^3}{10}\right)+ p\left(\frac{X^4}{8}+\frac{X^2Y^2}{60}\right)\right]$	$T_x = \frac{QX^2+[P-p(X-x)]2Y_x}{\sqrt{X^4+4Y^2x^2}}$	—	—
Arco parabolico incastrato nel vertice appoggia nell'altro estremo sopra sostegno, che si oppone al suo spostamento orizzontale ed è caricato da pX e dalla forza P.	0	»	»	$P\left(\frac{25X}{32Y}-\frac{Y}{28X}\right)-p\left(\frac{9X^2}{32Y}-\frac{Y}{28}\right)$	—
Arco parabolico coll'asse verticale appoggia nelle due estremità sopra sostegni, che si oppongono al loro spostamento ed è caricato di un peso $2pX$ uniformemente distribuito nella sua proiezione orizzontale 2X.	0	0	$T_x = \frac{pX^4+4px^2Y^2}{2Y\sqrt{X^4+4Y^2x^2}}$	$Q=\frac{X^2}{2Y}P$	$P=pX$

Segue TABELLA IX.

Forma degli archi e loro disposizione	MASSIMO SPOSTAMENTO		TENSIONE O PRESSIONE	Reazione degli appoggi	
	orizzontale	verticale		componente orizzontale	componente verticale
Arco circolare di ampiezza α incastrato ad un estremo e colla concavità rivolta al basso viene sollecitato nell'altro estremo da una forza verticale P diretta in alto, da una orizzontale Q diretta verso la sezione d'incastro e da un peso $pr\alpha$ uniformemente distribuito nella sua lunghezza (fig. 45).	$h = -\frac{r^3}{ET}\left[P\left\{\frac{3}{2}\text{sen.}^2\alpha - \alpha\,\text{sen.}\alpha\,\cos.\alpha + \cos.\alpha - 1\right\} + Q\left\{\frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2}\text{sen.}\alpha\cos.\alpha + \alpha\cos.^2\alpha\right\} + pr\left\{\alpha\left(\frac{1}{4} + \cos.\alpha + \cos.^2\alpha\right) - \frac{9}{4}\,\text{sen.}\alpha\cos.\alpha\right\}\right]$	$f = \frac{r^3}{ET}\left[-P\left\{\alpha\,\text{sen.}^2\alpha + \frac{3}{2}\text{sen}\,\alpha\cos.\alpha - 2\text{sen.}\alpha + \frac{\alpha}{2}\right\} + Q\left\{\frac{\text{sen.}^2\alpha}{2} - \alpha\,\text{sen.}\alpha\cos.\alpha + \cos.\alpha - 1\right\} + pr\left\{\cos.\alpha - \cos.^2\alpha + \frac{1}{4}\alpha^2 - \alpha(\text{sen.}\alpha + \text{sen.}\alpha\cos.\alpha) + \frac{5}{4}\text{sen.}^2\alpha\right\}\right]$	$T_x = P\,\text{sen.}\beta + Q\cos.\beta - pr\,\text{sen.}\beta\,(\alpha - \beta)$	—	—
Se il detto arco è un quarto di circonferenza	$h = -\frac{r^3}{ET}\left[-\frac{1}{2}P + \frac{\pi}{4}Q + \frac{\pi}{8}pr\right]$	$f = \frac{r^3}{ET}\left[-P\frac{3\pi - 8}{4} + \frac{1}{2}Q + pr\frac{\pi^2 - 8\pi + 20}{16}\right]$	»	—	—
Arco semicircolare verticale caricato di un peso $p\pi r$ uniformemente distribuito in πr appoggia colle estremità sopra sostegni orizzontali.	o	$f = 0{,}0134\frac{r^4}{ET}p$	»	$Q = \frac{pr}{2}$	$\frac{1}{2}\pi rp$
Arco circolare di ampiezza 2α caricato del peso $2pr\alpha$ appoggia alle due estremità sopra sostegni; quando il rapporto $\frac{Y}{2X}$ è molto piccolo.	o	$f = \frac{pr\alpha}{ET}\,\frac{3r^3\alpha^5}{20}$	»	$Q = \frac{Pr}{X}$	$pr\alpha = P$
Arco semicircolare appoggiato alle due estremità è caricato di un peso uniformemente distribuito sopra la sua proiezione orizzontale.	Per la sezione più pericolosa posta a 63° dalla chiave $h' = 0{,}0053\frac{pr^4}{ET}$	$f = -0{,}0137\frac{pr^3}{ET}$	$T_x = pr\left(\text{sen.}^2\beta + \frac{4\cos.\beta}{3\pi}\right)$	$0{,}4246\,pr$	pr

TABELLA X.

Valori del fattore $(1 + \gamma)$ dell'equazione generale di stabilità $\Omega = \frac{F}{K_2}(1 + \gamma)$ per ***prismi di legno*** **o** ***di ferro*** **di sezione Ω sollecitati alla compressione dalla forza F diretta secondo il loro asse.**

Rapporto tra l'altezza *l* e *d*	Per cilindri di sezione circolare di diametro *d*	Per prismi di sezione rettangolare di lato minore *d*
$\frac{l}{d} = 2$	1,0064	1,0048
= 4	1,0256	1,0192
= 6	1,0576	1,0432
= 8	1,1024	1,0768
= 10	1,160	1,120
= 12	1,230	1,170
= 14	1,313	1,235
= 16	1,409	1,307
= 18	1,518	1,388
= 20	1,640	1,480
= 25	2,000	1,750
= 30	2,440	8,080
= 40	3,560	2,920
= 50	5,000	4,000

TABELLA Xa.

Valori del fattore $(1 + \gamma)$ dell'equazione generale di stabilità $\Omega = \frac{F}{K_2}(1 + \gamma)$ per ***prismi di ghisa*** **di sezione Ω sollecitati alla compressione dalla forza F diretta secondo il loro asse.**

Rapporto tra l'altezza *l* e *d*	Per cilindri di sezione circolare di diametro *d*	Per prismi di sezione rettangolare di lato minore *d*
$\frac{l}{d} = 2$	1,04	1,03
= 4	1,16	1,12
= 6	1,36	1,27
= 8	1,64	1,48
= 10	2.00	1,75
= 12	2,44	2,08
= 14	2,96	2,47
= 16	3,56	2,92
= 18	4,24	3.43
= 20	5.00	4,00
= 25	7,25	5,68
= 30	10,00	7,75
= 40	17,00	13 00
= 50	26,00	19,75

TABELLA XI.

Valori del rapporto $\frac{2T}{h}$ per 416 travi in ferro di sezione a doppio T composte di un gambo verticale, di quattro ferri d'angolo e di due tavole orizzontali. I ferri d'angolo e le tavole sono quotate in millimetri.

Ferri d'angolo		50.50 / 9	70.70 / 12	90.90 / 15	50.50 / 9	50.50 / 9	50.50 / 9	70.70 / 12	70.70 / 12	70.70 / 12	90.90 / 15	90.90 / 15	90.90 / 15	90.90 / 15	90.90 / 15	90.90 / 15	90.90 / 15	90.90 / 15	90.90 / 15	90.90 / 15	90.90 / 15	90.90 / 15	90.90 / 15
Tavole		0	0	0	150 / 6	150 / 10	150 / 15	200 / 10	200 / 15	200 / 20	250 / 15	250 / 20	250 / 30	300 / 30	300 / 35	350 / 35	350 / 40	350 / 45	400 / 45	400 / 50	450 / 50	500 / 50	550 / 50
Spessore del gambo	Altezza della trave																						
0,007	0,20	0,00034	0,00050	0,00069	0,00046	0,00053	0,00065	0,00073	0,00083	0,00110	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	0,25	44	66	84	60	70	87	99	0,00114	140	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	0,30	51	83	99	75	88	,00110	0,00125	145	170	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	0,35	64	0,00109	0,00121	89	0,00109	132	152	177	209	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	0,40	74	117	142	0,00104	130	155	180	210	235	0,00280	0,00312	0,00372	0,00423	0,00457	0,00518	0,00555	.	.	.	.	.	.
.	0,45	85	133	164	118	117	177	210	242	275	327	364	441	499	536	605	650	.	.	.	.	.	.
.	0,50	96	150	180	132	165	200	240	273	315	375	415	510	575	615	695	745	.	.	.	.	.	.
0,008	0,50	0,00097	0,00135	0,00185	0,00137	0,00170	0,00205	0,0023	0,0028	0,0032	0,0038	0,0042	0,0051	0,0058	0,0062	0,0070	0,0075	0,0080	0,0089	0,0095	0,0103	.	.
.	0,60	0,00130	220	263	181	218	266	32	36	41	48	54	65	73	78	88	95	0,0101	0,0112	0,0112	132	.	.
.	0,70	175	270	341	226	266	327	38	44	49	58	66	78	88	95	0,0106	0,0114	123	136	146	161	.	.
.	0,80	220	323	419	270	314	388	45	52	58	68	77	92	0,0103	0,0112	123	134	145	161	172	190	.	.
.	0,90	250	375	498	315	362	449	52	65	67	80	89	0,0106	119	129	144	155	167	186	198	219	.	.
.	1,00	287	426	564	360	410	510	60	68	77	91	0,0101	121	135	147	163	177	190	211	225	249	.	.
0,010	1,00	0,0030	0,0044	0,0059	0,0038	0,0043	0,0053	0,0062	0,0070	0,0079	0,0093	0,0103	0,0123	0,0137	0,0149	0,0163	0,0179	0,0192	0,0213	0,0228	0,0251	0,0273	0,0295
.	1,10	.	.	.	44	51	62	70	79	89	0,0103	116	139	154	167	185	200	215	238	253	280	305	330
.	1,20	.	.	.	50	59	71	78	89	0,0100	117	130	155	171	185	205	222	239	263	281	310	337	365
.	1,30	.	.	.	57	67	80	88	99	110	129	143	169	188	201	226	245	263	289	311	341	371	400
.	1,40	.	.	.	64	75	89	98	0,0111	123	113	158	187	207	223	248	268	288	317	310	373	404	438
.	1,50	.	.	.	71	83	98	0,0108	122	135	156	173	205	229	245	270	291	313	345	369	405	439	475
.	1,60	.	.	.	79	91	0,0107	118	132	140	170	178	222	245	265	292	315	339	373	399	417	474	512
.	1,70	.	.	.	80	0,0100	116	128	143	158	184	203	239	264	286	313	339	365	401	430	470	510	550
.	1,80	.	.	.	93	108	123	139	153	172	199	219	258	284	307	337	364	392	430	401	503	517	589
.	1,90	.	.	.	0,0105	116	135	150	168	186	214	235	276	301	329	361	389	410	460	493	536	584	628
.	2,00	.	.	.	113	125	146	162	181	199	229	251	295	325	351	385	413	446	490	525	571	620	668

TABELLA XII.

Valori del rapporto $\frac{2T}{h}$ e dell'area Ω per travi semplici in ferro a doppio T. — I numeri delle prime quattro colonne hanno per unità il millimetro.

Provenienza	Altezza della trave *b*	Larghezza delle tavole *a*	Somma dei due spessori delle tavole $2e$	Spessore del gambo *e'*	Rapporto $\frac{2T}{h}$	Area Ω
Providence	100	43	12	5	0,000 0285	0,000 956
	100	45	12	7	318	0,001 156
	120	45	14	4	402	1054
	120	50	14	9	522	1654
	120	85	22	9	938	3652
	120	92	22	16	0,000 1214	4492
	140	47	14	6	0,000 0559	1216
	140	53	14	12	754	2056
	160	48	16	7	773	1552
	160	53	16	12	986	2352
	180	55	18	8	0,000 1120	1990
	180	62	18	15	1497	3250
	200	110	28	10	3093	3800
	200	117	28	17	3559	5200
	220	64	20	9	1822	3080
	220	71	20	16	2387	4774
	260	67	24	13	2997	4676
	260	74	24	20	3786	6496
	300	120	36	16	7330	0,010 656
	300	128	26	24	8530	13 056
Dumont et Dreyfus	80	45	14	6	0,000 0246	0,001 026
	80	55	14	16	353	1826
	80	50	16	8	282	1312
	80	55	16	13	333	1712
	80	55	18	9	358	1548
	80	65	18	19	464	2348
	100	55	16	6	432	1384
	100	65	16	16	698	2384
	100	60	18	9	531	1808
	100	70	18	19	698	2808

Segue TABELLA XII.

Provenienza	Altezza della trave b	Larghezza delle tavole a	Somma dei due spessori delle tavole $2e$	Spessore del gambo e'	Rapporto $\frac{2T}{h}$	Area Ω
Dumont et Dreyfus	100	65	22	11	0,0000 655	0,00 2288
	100	75	22	17	755	2888
	120	65	18	7	705	1764
	120	75	18	17	945	2964
	120	70	20	9	833	2300
	120	80	20	19	0,000 1073	3500
	120	75	24	11	1010	2856
	120	85	24	21	1250	4056
	140	80	20	8	1131	2560
	140	90	20	18	1457	3960
	140	85	24	10	1380	3200
	140	95	24	20	1710	4600
	140	90	28	12	1450	4149
	140	100	28	22	1780	5549
	160	80	20	8	1350	2720
	160	90	20	18	1770	4320
	160	85	24	10	1670	3400
	160	95	24	20	2090	5000
	160	90	28	12	1950	4104
	160	100	28	22	2376	5704
Montataire	100	42	15	10	0,0000 372	0,00 1580
	100	47	15	15	456	1980
	120	47	16	5	455	1272
	120	50	16	10	575	1840
	140	50	17	7	780	1711
	140	55	17	12	845	2411
	160	55	18	7	0,000 1152	1984
	160	62	18	14	1303	3104
	180	60	18	8	1192	2376
	180	67	18	15	1571	3636
	200	65	19	8	1517	2863
	200	73	19	16	2050	4283
	220	65	19	8	1736	2843
	220	73	19	16	2382	4603

TABELLA XIII.

Valori del rapporto $\frac{2T}{h}$ e dell'area Ω per sezioni quadrate di lato b.

b	T	$\frac{2T}{h}$	$\frac{h}{2T}$	Ω	$\frac{1}{\Omega}$
0,10	0,0000083	0,000160	6000	0,0100	100
11	0,0000122	220	4700	121	84
12	173	290	3400	144	70
13	238	360	2900	169	60
14	320	460	2200	196	52
15	422	560	1800	225	45
16	547	680	1460	256	40
17	693	820	1220	289	36
18	870	970	1000	324	32
19	0,0001002	0,001140	870	361	28
20	1333	1330	770	400	25
21	1620	1540	650	441	22
22	1950	1770	570	484	20
23	2380	2070	500	529	18
24	2840	2360	430	576	17
25	3230	2600	390	625	15
26	3800	2930	340	676	14
27	4430	3280	300	729	13
28	5180	3700	270	784	12
29	5900	4070	240	841	12
30	6750	4500	220	900	11
31	7800	5020	200	961	11
32	9000	5620	180	1024	10
33	0,0010100	6120	160	1087	9
34	11200	6580	150	1156	9
35	12400	7140	140	1225	8
36	14200	7880	130	1296	8
37	15600	8430	120	1369	7
38	17500	9210	110	1444	7
39	19000	9740	100	1521	6
40	21100	0,010660	95	1600	6

TABELLA XIV.

Valori del rapporto $\frac{2T}{h}$ e dell'area Ω per sezioni rettangolari, di cui l'altezza *b* è doppia della base *a*.

b	*a*	T	$\frac{2T}{h}$	$\frac{h}{2T}$	Ω	$\frac{1}{\Omega}$
0,10	0,050	0,0000041	0,000080	12500	0,0050	200
0,11	55	61	0,000110	9000	60	160
0,12	60	86	145	6800	72	135
0,13	65	0,0000119	180	5500	84	139
0,14	70	160	230	4400	98	118
0,15	75	211	280	3500	0,0112	89
0,16	80	273	340	2900	128	77
0,17	85	346	410	2400	144	68
0,18	90	435	485	2100	162	59
0,19	95	501	570	1700	180	55
0,20	0,100	666	665	1500	200	50
0,21	105	810	770	1280	220	45
0,22	110	975	885	1230	242	41
0,23	115	0,0001190	0,001035	940	264	37
0,24	120	1420	1180	860	288	34
0,25	125	1615	1300	750	312	32
0,26	130	1900	1465	670	338	29
0,27	135	2215	1640	590	364	27
0,28	140	2590	1850	540	392	25
0,29	145	2950	2035	490	420	23
0,30	150	3375	2250	440	450	22
0,31	155	3900	2510	390	480	21
0,32	160	4500	2810	340	512	20
0,23	165	5050	3060	320	544	19
0,34	170	5600	3290	300	578	17
0,35	175	6200	3570	270	612	16
0,36	180	7100	3940	250	648	15
0,37	185	7800	4215	240	684	14
0,38	190	8750	4605	210	722	13
0,30	195	9500	4870	200	760	13
0,40	0,200	0,0010550	5330	190	800	12

TABELLA XV.

Valori delle lunghezze degli archi di raggio = 1.

Ampiezza dell'arco	Lunghezza dell'arco	Ampiezza dell'arco	Lunghezza dell'arco	Ampiezza dell'arco	Lunghezza dell'arco
0°	0,0000	31°	0,5411	62°	1,082
1°	0,0175	32°	0,5585	63°	1,099
2°	0,0349	33°	0,5760	64°	1,117
3°	0,0524	34°	0,5934	65°	1,134
4°	0,0698	35°	0,6109	66°	1,151
5°	0,0873	36°	0,6283	67°	1,169
6°	0,1047	37°	0,6458	68°	1,186
7°	0,1222	38°	0,6632	69°	1,204
8°	0,1396	39°	0,6807	70°	1,221
9°	0,1571	40°	0,6981	71°	1,239
10°	0,1745	41°	0,7156	72°	1,256
11°	0,1920	42°	0,7330	73°	1,274
12°	0,2094	43°	0,7505	74°	1,291
13°	0,2269	44°	0,7679	75°	1,309
14°	0,2443	45°	0,7854	76°	1,326
15°	0,2618	46°	0,8029	77°	1,343
16°	0,2793	47°	0,8203	78°	1,361
17°	0,2967	48°	0,8378	79°	1,378
18°	0,3142	49°	0,8552	80°	1,396
19°	0,3316	50°	0,8727	81°	1,413
20°	0,3491	51°	0,8901	82°	1,431
21°	0,3665	52°	0,9076	83°	1,448
22°	0,3840	53°	0,9250	84°	1,466
23°	0,4014	54°	0,9425	85°	1,483
24°	0,4189	55°	0,9599	86°	1,501
25°	0,4363	56°	0,9774	87°	1,518
26°	0,4538	57°	0,9948	88°	1,536
27°	0,4712	58°	1,0123	89°	1,553
28°	0,4887	59°	1,029	90°	1,5708
29°	0,5061	60°	1,047		
30°	0,5236	61°	1,064		

TABELLA XVI.

Valori delle funzioni trigonometriche.

Grad.	Min.	Sen.	Cosen.	Tang.	Cotang.		
0	0	0,00000	1,00000	0,00000	∞	0	90
	10	0,00291	0,99999	0,00291	343,77371	50	
	20	0,00582	0,99998	0,00582	171,88540	40	
	30	0,00873	0,99996	0,00873	114,58865	30	
	40	0,01164	0,99993	0,01164	85,93979	20	
	50	0,01554	0,99989	0,01455	68,75009	10	
1	0	0,01745	0,99985	0,01746	57,28996	0	89
	10	0,02036	0,99979	0,02036	49,10388	50	
	20	0,02327	0,99973	0,02328	42,96408	40	
	30	0,02618	0,99966	0,02619	38,18846	30	
	40	0,02908	0,99958	0,02910	34,36777	20	
	50	0,03199	0,99949	0,03201	31,24158	10	
2	0	0,03490	0,99939	0,03492	28,63625	0	88
	10	0,03781	0,99929	0,03783	26,43160	50	
	20	0,04071	0,99917	0,04075	21,54176	40	
	30	0,04362	0,99905	0,04366	22,90377	30	
	40	0,04653	0,99892	0,04658	21,47040	20	
	50	0,04943	0,99878	0,04949	20,20555	10	
3	0	0,05234	0,99863	0,05241	19,08114	0	87
	10	0,05524	0,99847	0,05533	18,07498	50	
	20	0,05814	0,99831	0,05824	17,16934	40	
	30	0,06105	0,99813	0,06116	16,34985	30	
	40	0,06395	0,99795	0,06408	15,60478	20	
	50	0,06685	0,99776	0,06700	14,92442	10	
4	0	0,06976	0,99756	0,06993	14,30067	0	86
	10	0,07266	0,99736	0,07285	13,72674	50	
	20	0,07556	0,99714	0,07578	13,19688	40	
	30	0,07846	0,99692	0,07870	12,70620	30	
	40	0,08136	0,99668	0,08163	12,25051	20	
	50	0,08426	0,99644	0,08456	11,82617	10	
		Cosen.	Sen.	Cotang.	Tang.	Min.	Grad.

Segue TABELLA XVI.

Grad.	Min.	Sen.	Cosen.	Tang.	Cotang.		
5	0	0,08716	0,99619	0,08749	11,43005	0	85
	10	0,09005	0,99594	0,09042	11,05943	50	
	20	0,09295	0,99567	0,09335	10,71191	40	
	30	0,09585	0,99540	0,09629	10,38540	30	
	40	0,09874	0,99511	0,09923	10,07803	20	
	50	0,10164	0,99482	0,10216	9,78817	10	
6	0	0,10453	0,99452	0,10510	9,51436	0	84
	10	0,10742	0,99421	0,10805	9,25530	50	
	20	0,11031	0,99390	0,11099	9,00983	40	
	30	0,11320	0,99357	0,11393	8,77681	30	
	40	0,11609	0,99324	0,11688	8,55555	20	
	50	0,11898	0,99290	0,11983	8,34496	10	
7	0	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	0	83
	10	0,12476	0,99219	0,12574	7,95302	50	
	20	0,12764	0,99182	0,12869	7,77035	40	
	30	0,13053	0,99144	0,13165	7,59575	30	
	40	0,13341	0,99106	0,13461	7,42871	20	
	50	0,13629	0,99067	0,13758	7,26873	10	
8	0	0,13916	0,99027	0,14054	7,11537	0	82
	10	0,14205	0,98986	0,14351	6,96823	50	
	20	0,14493	0,98944	0,14648	6,82694	40	
	30	0,14781	0,98902	0,14945	6,69116	30	
	40	0,15069	0,98858	0,15243	6,56055	20	
	50	0,15356	0,98814	0,15540	6,43484	10	
9	0	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	0	81
	10	0,15931	0,98723	0,16137	6,19703	50	
	20	0,16218	0,98676	0,16434	6,08444	40	
	30	0,16505	0,98629	0,16734	5,97576	30	
	40	0,16792	0,98580	0,17033	5,97080	20	
	50	0,17078	0,98531	0,17333	5,76128	10	
		Cosen.	Sen.	Cotang.	Tang.	Min.	Grad.

Segue TABELLA XVI.

Grad.	Min.	Sen.	Cosen.	Tang.	Cotang.		
10	0	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	0	80
	10	0,17651	0,98430	0,17933	5,57638	50	
	20	0,17937	0,98378	0,18233	5,48451	40	
	30	0,18224	0,98325	0,18534	5,39552	30	
	40	0,18509	0,98272	0,18835	5,30928	20	
	50	0,18795	0,98218	0,19136	5,22566	10	
11	0	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	0	79
	10	0,19366	0,98107	0,19740	4,06534	50	
	20	0,19652	0,98050	0,20042	4,98950	40	
	30	0,19937	0,97992	0,20345	4,91516	30	
	40	0,20222	0,97934	0,20648	4,84300	20	
	50	0,20507	0,97875	0,20952	4,77286	10	
12	0	0,20791	0,97815	0,21256	4,70464	0	78
	10	0,21076	0,97754	0,21560	4,63825	50	
	20	0,21360	0,97692	0,21864	4,57363	40	
	30	0,21644	0,97630	0,22169	4,51071	30	
	40	0,21928	0,97566	0,22475	4,44942	20	
	50	0,22212	0,97502	0,22781	4,38969	10	
13	0	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	0	77
	10	0,22778	0,97371	0,23393	4,27471	50	
	20	0,23062	0,97304	0,23700	4,21933	40	
	30	0,23345	0,97237	0,24008	4,16530	30	
	40	0,23627	0,97169	0,24316	4,11256	20	
	50	0,23910	0,97100	0,24624	4,06107	10	
14	0	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	0	76
	10	0,24474	0,96959	0,25242	3,96165	50	
	20	0,24756	0,96887	0,25552	3,91364	40	
	30	1,25038	0,96815	0,25862	3,86671	30	
	40	0,25320	0,96742	0,26172	3,82083	20	
	50	0,25601	0,96667	0,26483	3,77595	10	
		Cosen.	Sen.	Cotang.	Tang.	Min.	Grad.

Segue TABELLA XVI.

Grad.	Min.	Sen.	Cosen.	Tang.	Cotang.		
15	0	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	0	75
	10	0,26163	0,96517	0,27107	3,68909	50	
	20	0,26443	0,96440	0,27419	3,64705	40	
	30	0,26724	0,96363	0,27732	3,60588	30	
	40	0,27004	0,96285	0,28046	3,56557	20	
	50	0,27284	0,96206	0,28360	3,52609	10	
16	0	0,27564	0,96128	0,28675	3,48741	0	74
	10	0,27843	0,96046	0,28990	3,44951	50	
	20	0,28123	0,95964	0,29305	3,41236	40	
	30	0,28402	0,95882	0,29621	3,37594	30	
	40	0,28680	0,95799	0,29938	3,34023	20	
	50	0,28959	0,95715	0,30255	3,30521	10	
17	0	0,29237	0,95630	0,30573	3,27085	0	73
	10	0,29515	0,95545	0,30891	3,23714	50	
	20	0,29793	0,95459	0,31210	3,20406	40	
	30	0,30071	0,95372	0,31530	3,17159	30	
	40	0,30348	0,95284	0,31850	3,13972	20	
	50	0,30625	0,95195	0,32171	3,10842	10	
18	0	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	0	72
	10	0,31178	0,95015	0,32814	3,04749	50	
	20	0,31454	0,94924	0,33136	3,01783	40	
	30	0,31730	0,94833	0,33460	2,98868	30	
	40	0,32006	0,94740	0,33783	2,96004	20	
	50	0,32282	0,94646	0,34108	2,93189	10	
19	0	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	0	71
	10	0,32832	0,94457	0,34758	2,87700	50	
	20	0,33106	0,94361	0,35085	2,85023	40	
	30	0,33381	0,94264	0,35412	2,82391	30	
	40	0,33655	0,94167	0,35740	2,79802	20	
	50	0,33929	0,94068	0,36068	2,77254	10	
		Cosen.	Sen.	Cotang.	Tang.	Min.	Grad.

Segue TABELLA XVI.

Grad.	Min.	Sen.	Cosen.	Tang.	Cotang.		
20	0	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	0	70
	10	0,34475	0,93869	0,36727	2,72281	50	
	20	0,34748	0,93769	0,37057	2,69853	40	
	30	0,35021	0,93667	0,37388	2,67462	30	
	40	0,35293	0,93565	0,37720	2,65109	20	
	50	0,35565	0,93462	0,38053	2,62791	10	
21	0	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	0	69
	10	0,36108	0,93253	0,38721	2,58161	50	
	20	0,36379	0,93148	0,39055	2,56046	40	
	30	0,36650	0,93042	0,39391	2,53865	30	
	40	0,36921	0,92935	0,39727	2,51715	20	
	50	0,37191	0,92827	0,40065	2,49597	10	
22	0	0,37461	0,92718	0,40403	2,47509	0	68
	10	0,36730	0,92609	0,40741	2,45451	50	
	20	0,37999	0,92499	0,41081	2,43422	40	
	30	0,38268	0,92388	0,41421	2,41421	30	
	40	0,38537	0,92276	0,41763	2,39449	20	
	50	0,38805	0,92164	0,42105	2,37504	10	
23	0	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	0	67
	10	0,39341	0,91936	0,42791	2,33693	50	
	20	0,39608	0,91822	0,43136	2,31826	40	
	30	0,39875	0,91706	0,43481	2,29984	30	
	40	0,40141	0,91590	0,43828	2,28167	20	
	50	0,40408	0,91472	0,44175	2,26374	10	
24	0	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	0	66
	10	0,40939	0,91236	0,44872	2,22857	50	
	20	0,41204	0,91116	0,45222	2,21132	40	
	30	0,41469	0,90996	0,45573	2,19430	30	
	40	0,41734	0,90875	0,45924	2,17749	20	
	50	0,41998	0,90753	0,46277	2,16090	10	
		Cosen.	Sen.	Cotang.	Tang.	Min.	Grad.

Segue TABELLA XVI.

Grad.	Min.	Sen.	Cosen.	Tang.	Cotang.		
25	0	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	0	65
	10	0,42525	0,90507	0,46985	2,12832	50	
	20	0,42788	0,90383	0,47341	2,11233	40	
	30	0,43051	0,90259	0,47698	2,09654	30	
	40	0,43313	0,90133	0,48055	2,08094	20	
	50	0,43575	0,90007	0,48414	2,06553	10	
26	0	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	0	64
	10	0,44098	0,89752	0,49134	2,03526	50	
	20	0,44359	0,89623	0,49495	2,02039	40	
	30	0,44620	0,89493	0,49858	2,00569	30	
	40	0,44880	0,89363	0,50222	1,99116	20	
	50	0,45140	0,89232	0,50587	1,97680	10	
27	0	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	0	63
	10	0,45658	0,88968	0,51319	1,94858	50	
	20	0,45917	0,88835	0,51688	1,93470	40	
	30	0,46175	0,88701	0,52057	1,92098	30	
	40	0,46473	0,88566	0,52427	1,90741	20	
	50	0,46690	0,88431	0,52798	1,89400	10	
28	0	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	0	62
	10	0,47204	0,88158	0,53545	1,86760	50	
	20	0,47460	0,88020	0,53920	1,85462	40	
	30	0,47716	0,87882	0,54296	1,84177	30	
	40	0,47971	0,87743	0,54673	1,82906	20	
	50	0,48226	0,87603	0,55051	1,81649	10	
29	0	0,48481	0,87462	0,55431	1,80405	0	61
	10	0,48735	0,87321	0,55812	1,79174	50	
	20	0,48989	0,87178	0,56194	1,77955	40	
	30	0,49242	0,87036	0,56577	1,76749	30	
	40	0,49495	0,86892	0,56962	1,75556	20	
	50	0,49748	0,86748	0,57348	1,74375	10	
		Cosen.	Sen.	Cotang.	Tang.	Min.	Grad.

Segue TABELLA XVI.

Grad.	Min.	Sen.	Cosen.	Tang.	Cotang.		
30	0	0,50000	0,86603	0,57738	1,73205	0	60
	10	0,50252	0,86457	0,58124	1,72047	50	
	20	0,50503	0,86310	0,58513	1,70901	40	
	30	0,50754	0,86163	0,58904	1,69766	30	
	40	0,51004	0,86015	0,59297	1,68643	20	
	50	0,51254	0,85866	0,59691	1,67530	10	
31	0	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	0	59
	10	0,51753	0,85567	0,60483	1,65337	50	
	20	0,52002	0,85416	0,60881	1 64256	40	
	30	0,52250	0,85264	0,61280	1,63186	30	
	40	0,52498	0,85112	0,61681	1,62125	20	
	50	0,52745	0,84959	0,62083	1,61074	10	
32	0	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	0	58
	10	0,53238	0,84650	0,62892	1,59002	50	
	20	0,53484	0,84495	0,63299	1,57981	40	
	30	0,53730	0,84339	0,63707	1,56969	30	
	40	0,53975	0,84182	0,64117	1,55966	20	
	50	0,54220	0,84025	0,64528	1,54972	10	
33	0	0,54464	0,83869	0,64941	1,53986	0	57
	10	0,54708	0,83708	0,65355	1,53010	50	
	20	0,54951	0,83549	0,65771	1,52043	40	
	30	0,55194	0,83389	0,66189	1,51084	30	
	40	0,55436	0,83228	0,66608	1,50133	20	
	50	0,55678	0,83066	0,67028	1,49190	10	
34	0	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	0	56
	10	0,56160	0,82741	0,67875	1,47330	50	
	20	0,56401	0,82577	0,68301	1,46411	40	
	30	0,56641	0,82413	0,68728	1,45501	30	
	40	0,56880	0,82248	0,69157	1,44598	20	
	50	0,57119	0,82082	0,69588	1,43703	10	
		Cosen.	Sen.	Cotang.	Tang.	Min.	Grad.

Segue TABELLA XVI.

Grad.	Min.	Sen.	Cosen.	Tang.	Cotang.		
35	0	0,57358	0,81918	0,70021	1,42815	0	55
	10	0,57596	0,81748	0,70455	1,41934	50	
	20	0,57833	0,81580	0,70891	1,41061	40	
	30	0,58070	0,81412	0,71329	1,40195	30	
	40	0,58307	0,81242	0,71769	1,39336	20	
	50	0,58543	0,81072	0,72211	1,38484	10	
36	0	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	0	54
	10	0,59014	0,80730	0,73100	1,36800	50	
	20	0,59248	0,80558	0,73547	1,35968	40	
	30	0,59482	0,80386	0,73996	1,35142	30	
	40	0,59716	0,80212	0,74447	1,34323	20	
	50	0,59949	0,80038	0,74900	1,33511	10	
37	0	0,60181	0,79864	0,75358	1,32704	0	53
	10	0,60414	0,79688	0,75812	1,31904	50	
	20	0,60645	0,79512	0,76272	1,31110	40	
	30	0,60876	0,79335	0,76733	1,30323	30	
	40	0,61107	0,79158	0,77196	1,29541	20	
	50	0,61337	0,78980	0,77661	1,28764	10	
38	0	0,61566	0,78801	0,78129	1,27994	0	52
	10	0,61795	0,78622	0,78598	1,27230	50	
	20	0,62024	0,78442	0,79070	1,26471	40	
	30	0,62251	0,78261	0,79544	1,25717	30	
	40	0,62479	0,78079	0,80020	1,24969	20	
	50	0,62706	0,77897	0,80498	1,24227	10	
39	0	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	0	51
	10	0,63158	0,77531	0,81461	1,22758	50	
	20	0,63383	0,77347	0,81946	1,22031	40	
	30	0,63608	0,77162	0,82434	1,21310	30	
	40	0,63832	0,76977	0,82923	1,20593	20	
	50	0,64056	0,76791	0,83415	1,19882	10	
		Cosen.	Sen.	Cotang.	Tang.	Min.	Grad.

Segue TABELLA XVI.

Grad.	Min.	Sen.	Cosen.	Tang.	Cotang.		
40	0	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	0	50
	10	0,64501	0,76417	0,84407	1,18474	50	
	20	0,64723	0,76229	0,84906	1,17777	40	
	30	0,64945	0,76041	0,85408	1,17085	30	
	40	0,65196	0,75851	0,85912	1,16398	20	
	50	0,65386	0,75661	0,86419	1,15715	10	
41	0	0,65608	0,75471	0,86929	1,15037	0	49
	10	0,65825	0,75280	0,87441	1,14363	50	
	20	0,66044	0,75088	0,87955	1,13694	40	
	30	0,66262	0,74896	0,88473	1,13029	30	
	40	0,66480	0,74703	0,88992	1,12366	20	
	50	0,66697	0,74509	0,89515	1,11713	10	
42	0	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	0	48
	10	0,67129	0,74120	0,90569	1,10414	50	
	20	0,67344	0,73924	0,91099	1,09770	40	
	30	0,67559	0,73728	0,91633	1,09131	30	
	40	0,67773	0,73531	0,92170	1,08496	20	
	50	0,67987	0,73333	0,92709	1,07864	10	
43	0	0,68200	0,73138	0,93252	1,07237	0	47
	10	0,68412	0,72937	0,93797	1,06613	50	
	20	0,68624	0,72737	0,94345	1,05994	40	
	30	0,68835	0,72537	0,94896	1,05378	30	
	40	0,69046	0,72337	0,95451	1,04766	20	
	50	0,69256	0,72136	0,96008	1,04158	10	
44	0	0,69468	0,71934	0,96569	1,03553	0	46
	10	0,69675	0,71732	0,97133	1,02952	50	
	20	0,69883	0,71529	0,97700	1,02355	40	
	30	0,70091	0,71325	0,98270	1,01761	30	
	40	0,70298	0,71121	0,98843	1,01170	20	
	50	0,70505	0,70916	0,99420	1,00583	10	
45	0	0,70711	0,70711	1,00000	1,00000	0	45
		Cosen.	Sen.	Cotang.	Tang.	Min.	Grad.





